

$\triangle OAB$ において  $OA = 3$ ,  $OB = 2$ ,  $\angle AOB = 60^\circ$ とする.  $\triangle OAB$ の垂心を  $H$ とするとき,  $\overrightarrow{OH}$ を  $\overrightarrow{OA}$ と  $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ.

(21 京都大 文系 1(2))

【答】  $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{9}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

【解答】

$H$ は  $\triangle OAB$ の垂心であるから

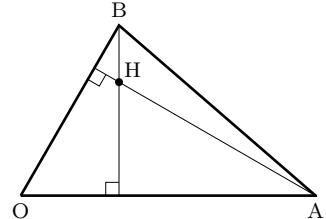
$$\begin{cases} AH \perp OB \\ BH \perp OA \end{cases}$$

である. 実数  $x$ ,  $y$ を用いて  $\overrightarrow{OH} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ とおくと

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \\ (x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + y|\overrightarrow{OB}|^2 = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\ x|\overrightarrow{OA}|^2 + y\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \end{cases}$$



$OA = 3$ ,  $OB = 2$ ,  $\angle AOB = 60^\circ$ より  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 3 \times 2 \times \cos 60^\circ = 3$ であるから, 上式は

$$\begin{cases} 3x + 4y = 3 \\ 9x + 3y = 3 \end{cases} \quad \therefore x = \frac{1}{9}, y = \frac{2}{3}$$

よって

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{9}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

- $A$ から  $OB$ に下した垂線の足を  $C$ ,  $B$ から  $OA$ に下した垂線の足を  $D$ とおくと

$$OC = OA \cos 60^\circ = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore BC = OB - OC = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

また

$$OD = OB \cos 60^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1,$$

$$\therefore AD = OA - OD = 3 - 1 = 2$$

である.  $\triangle OBD$ と直線  $CA$ にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{CH}{HA} \times \frac{AD}{DO} \times \frac{OB}{BC} = 1$$

$$\frac{CH}{HA} \times \frac{2}{1} \times \frac{\frac{2}{1}}{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\therefore CH : HA = 1 : 8$$

よって

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\overrightarrow{OA} + 8\overrightarrow{OC}}{9} = \frac{1}{9}\overrightarrow{OA} + \frac{8}{9}\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{9}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$$

である.

