平面上に $\triangle$ABC がある．このとき，

$$X=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}},\quad Y=\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}},\quad Z=\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

とする．$XY=ZX$ を満たすとき，$\triangle$ABC はどのような三角形か答えよ．

(21 富山県大 工 2)

【答】 $\angle\mathrm{A}=90^\circ$ の直角三角形または $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ の二等辺三角形

【解答】

与えられた条件は

$$\begin{aligned} XY=ZX &\iff X(Y-Z)=0 \\ &\iff X=0 \text{ または } Y=Z \end{aligned}$$

(i) $X=0$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\fallingdotseq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\fallingdotseq\vec{0}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}\qquad\therefore\quad\angle\mathrm{A}=90^\circ$$

(ii) $Y=Z$ のとき

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}} \\ &\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}})=0 \\ &(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}})=0 \\ \therefore\quad &|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2\qquad\therefore\quad\mathrm{AB}=\mathrm{AC} \end{aligned}$$

以上 (i)，(ii) より，$\triangle$ABC は

$\angle\mathrm{A}=90^\circ$ の直角三角形 または $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ の二等辺三角形 ……(答)

である．

- (ii) を B を始点として整理すると

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}})=0 \\ &\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}})=0 \\ &\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{BA}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}})=0 \\ &|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=0 \\ &|\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2 \\ \therefore\quad &|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2\qquad\therefore\quad\mathrm{AB}=\mathrm{AC} \end{aligned}$$

  となる．