$\triangle$OAB は OA $=$ OB $= 1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\dfrac{3}{5}$ を満たすとする．このとき次の問いに答えなさい．

(1) 線分 AB の長さを求めなさい．
(2) 直線 OA 上に点 O とは異なる点 C を，BC $= 1$ を満たすようにとる．このとき，線分 OC の長さを求めなさい．
(3) $\triangle$OAB，$\triangle$OBC の内接円の半径をそれぞれ求めなさい．

(21 山口大 獣・国際・農・経済・教育 11)

【答】

(1) AB $= \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

(2) OC $= \dfrac{6}{5}$

(3) $\triangle$OAB の内接円の半径は $\dfrac{10-4\sqrt{5}}{5}$，$\triangle$OBC の内接円の半径は $\dfrac{3}{10}$

【解答】

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 1,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\frac{3}{5} \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) ① より

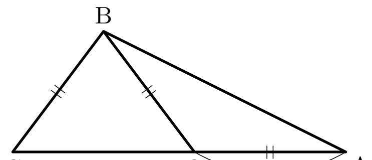
$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= |\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}| \\ &= \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2} \\ &= \sqrt{1^2 - 2 \times \left(-\frac{3}{5}\right) + 1^2} \\ &= \boldsymbol{\frac{4\sqrt{5}}{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

(2) 点 C は直線 OA 上にあり，点 O とは異なるので，実数 k $(k \neq 0)$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

と表すことができる．



$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 \\ &= |k\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 \\ &= k^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - 2k\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 \\ &= k^2 + \frac{6}{5}k + 1 \quad (\because\ ①)\end{aligned}$$

BC $= 1$ より

$$k^2 + \frac{6}{5}k + 1 = 1 \qquad \therefore\quad k\left(k + \frac{6}{5}\right) = 0 \qquad \therefore\quad k = -\frac{6}{5}\ (\because\ k \neq 0)$$

である．

よって，線分 OC の長さは

$$\mathrm{OC} = \left|-\frac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \boldsymbol{\frac{6}{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $\triangle$OAB, $\triangle$OBC の面積をそれぞれ S_1, S_2 とおくと

$$S_1 = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 \times 1^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}$$

$$S_2 = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}}S_1 = \frac{6}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$$

$\triangle$OAB, $\triangle$OBC の内接円の半径をそれぞれ r_1, r_2 とおくと，r_1 は

$$S_1 = \frac{1}{2}(\mathrm{OA} + \mathrm{OB} + \mathrm{AB})r_1$$

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{2}\left(1 + 1 + \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)r_1$$

$$\therefore \quad r_1 = \frac{2}{5} \times \frac{5}{5 + 2\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{10 - 4\sqrt{5}}{5}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

また，r_2 は

$$S_2 = \frac{1}{2}(\mathrm{OB} + \mathrm{OC} + \mathrm{BC})r_2$$

$$\frac{12}{25} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{6}{5} + 1\right)r_2$$

$$\therefore \quad r_2 = \frac{12}{25} \times \frac{5}{8} = \boldsymbol{\frac{3}{10}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．