

2つのベクトル $\vec{a} = (1, t)$ と $\vec{b} = \left(1, \frac{t}{3}\right)$ のなす角が $\frac{\pi}{6}$ であるとき, t の値を求めよ. ただし, $t > 0$ とする.

(21 岩手大 理工 1(1))

【答】 $t = \sqrt{3}$

【解答】

$\vec{a} = (1, t)$ と $\vec{b} = \left(1, \frac{t}{3}\right)$ のなす角が $\frac{\pi}{6}$ であるから

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{6}$$

$$1 + \frac{t^2}{3} = \sqrt{1+t^2} \sqrt{1 + \frac{t^2}{9}} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2(3+t^2) = \sqrt{1+t^2} \sqrt{9+t^2} \sqrt{3}$$

$$4(9+6t^2+t^4) = 3(9+10t^2+t^4)$$

$$t^4 - 6t^2 + 9 = 0$$

$$(t^2 - 3)^2 = 0 \quad \therefore t^2 = 3$$

$t > 0$ とあわせると $t = \sqrt{3}$ である.

……(答)

- $\vec{a} = (1, t)$, $\vec{b} = \left(1, \frac{t}{3}\right)$ と x 軸正方向とのなす角をそれぞれ α , β とおくと, $t > 0$ より

$$\tan \alpha = t, \quad \tan \beta = \frac{t}{3} \quad \left(0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

である. \vec{a} と \vec{b} のなす角が $\frac{\pi}{6}$ であるから

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{t - \frac{t}{3}}{1 + t \times \frac{t}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\because \text{加法定理})$$

$$\frac{2t}{t^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$t^2 - 2\sqrt{3}t + 3 = 0$$

$$\therefore (t - \sqrt{3})^2 = 0$$

$t > 0$ とあわせると $t = \sqrt{3}$ である.