△ABC において，AB = 4, AC = 5, BC = 6 であり，辺 AC 上の点 D と辺 AB 上の点 E はそれぞれ AC ⊥ BD, AB ⊥ CE を満たす．また，BD と CE の交点を H とする．

(1) $\cos A = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である．

(21 昭和薬大 薬 2)

【答】

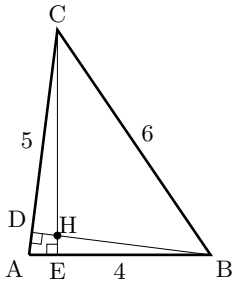
ア	イ	ウ	エオ	カ	キク	ケ	コ	サ	シス
1	8	5	32	1	10	1	7	3	35

【解答】

(1) △ABC について，余弦定理を用いると

$$\cos A = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB} \times \mathrm{AC}} = \frac{16 + 25 - 36}{2 \times 4 \times 5} = \boldsymbol{\frac{1}{8}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．



(2) (1) の結果より

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{5 \times \frac{1}{8}}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{\frac{5}{32}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AC}}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{4 \times \frac{1}{8}}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \boldsymbol{\frac{1}{10}}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (α, β は実数) とおく．CH ⊥ AB より $\overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ であるから

$$(\overrightarrow{\mathrm{AH}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$(\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 4 \times 5 \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{5}{2}$ であるから

$$16\alpha + \frac{5}{2}\beta = \frac{5}{2}$$
$$\therefore \quad 32\alpha + 5\beta = 5 \quad \cdots\cdots ①$$

同じく

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$(\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$\frac{5}{2}\alpha + 25\beta = \frac{5}{2}$$
$$\therefore \quad \alpha + 10\beta = 1 \quad \cdots\cdots ②$$

① かつ ② を解くと

$$\alpha = \frac{1}{7}, \quad \beta = \frac{3}{35}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \boldsymbol{\frac{1}{7}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \boldsymbol{\frac{3}{35}}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- H を 2 直線 BD，CE の交点ととらえてもよい．
  H は直線 BD 上の点であるから，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{s}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad \cdots\cdots ㋐$$

  と表すことができる．また，H は直線 CE 上の点でもあるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AE}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{5}{32}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad \cdots\cdots ㋑$$

  と表すこともできる．
  $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立であるから，㋐，㋑より

$$\begin{cases} 1-s = \dfrac{5}{32}(1-t) \\ \dfrac{s}{10} = t \end{cases} \qquad \therefore \quad s = \frac{6}{7},\ t = \frac{3}{35}$$

  よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{3}{35}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

  である．
- ㋐ 以後は，次のようにしてもよい．

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AH}} &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{s}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad \cdots\cdots ㋐ \\ &= \frac{32}{5}(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AE}} + \frac{s}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \end{aligned}$$

  H は直線 CE 上の点でもあるから

$$\frac{32}{5}(1-s) + \frac{s}{10} = 1 \qquad \therefore \quad \frac{27}{5} - \frac{63}{10}s = 0 \qquad \therefore \quad s = \frac{6}{7}$$

  である．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{3}{35}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

  である．
- △ABD と直線 CE でメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{HD}} \times \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{CA}} \times \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}} = 1$$

$$\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{HD}} \times \frac{\frac{9}{10}\mathrm{CA}}{\mathrm{CA}} \times \frac{\frac{5}{32}\mathrm{AB}}{\frac{27}{32}\mathrm{AB}} = 1$$

$$\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{HD}} \times \frac{9}{10} \times \frac{5}{27} = 1$$

$$\therefore \quad \mathrm{BH} : \mathrm{HD} = 6 : 1$$

  よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 6\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{7} = \frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{6}{7}\left(\frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{3}{35}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

  である．