△ABC の外心を O，垂心を H とするとき，下の問いに答えよ．ただし，三角形の各頂点から対辺またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わり，その点を三角形の垂心という．

(1) 等式 $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が成り立つことを示せ．

(2) 等式 $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{(2+\sqrt{3})\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \sqrt{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3+2\sqrt{3}}$ が成り立つような ∠A の大きさを求めよ．

(21 東京学芸大 2)

---

【答】

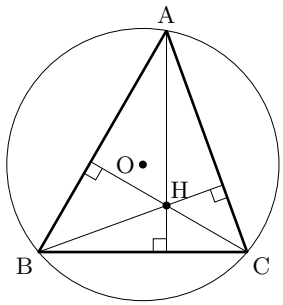
(1) 略

(2) $\angle\mathrm{A} = 75^\circ$

---

【解答】

(1) △ABC の外接円の半径を $R$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおくと




$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = R$$

である．$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ をみたす点 P をとると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} &= (\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) \\ &= (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) \\ &= |\vec{c}|^2 - |\vec{b}|^2 \\ &= R^2 - R^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

が成り立つ．同様に，$\overrightarrow{\mathrm{BP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CA}}$ も成り立つから，点 P は △ABC の垂心 H と一致する．

すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が成り立つ． ……(証明終わり)

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{(2+\sqrt{3})\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \sqrt{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3+2\sqrt{3}}$ が成り立つとき，(1) より

$$\begin{aligned}&(3+2\sqrt{3})(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = (2+\sqrt{3})\vec{a} + \sqrt{3}\vec{b} + \vec{c} \\ &(1+\sqrt{3})\vec{a} + (3+\sqrt{3})\vec{b} + (2+2\sqrt{3})\vec{c} = 0 \\ &\vec{a} + \sqrt{3}\vec{b} + 2\vec{c} = 0\end{aligned}$$

が成り立つ．∠A の大きさを求めるには，$\angle\mathrm{A} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BOC}$ であるから，∠BOC の大きさを求めればよい．

$$\begin{aligned}&\sqrt{3}\vec{b} + 2\vec{c} = -\vec{a} \\ &|\sqrt{3}\vec{b} + 2\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 \\ &3|\vec{b}|^2 + 4\sqrt{3}\vec{b} \cdot \vec{c} + 4|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 \\ &3R^2 + 4\sqrt{3}R^2 \cos\angle\mathrm{BOC} + 4R^2 = R^2\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \cos\angle\mathrm{BOC} = -\frac{6}{4\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって $\angle\mathrm{BOC} = 150^\circ$ であり

$$\angle\mathrm{A} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{BOC} = \mathbf{75^\circ}$$ ……(答)

である．