$\triangle$OAB において，$\mathrm{OA}=5,\ \mathrm{OB}=4,\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\sqrt{21}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=a,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく．$\triangle$OAB の外心を P，垂心を H とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boxed{\text{ア}}\,\vec{a}+\boxed{\text{イ}}\,\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OH}}=\boxed{\text{ウ}}\,\vec{a}+\boxed{\text{エ}}\,\vec{b}$$

と表すことができる．

また，線分 PH を $1:2$ に内分する点 D について，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\boxed{\text{オ}}\,\vec{a}+\boxed{\text{カ}}\,\vec{b}$$

と表せることから，点 D は $\triangle$OAB の $\boxed{\text{キ}}$ である．

(21 関西医大 1(1))

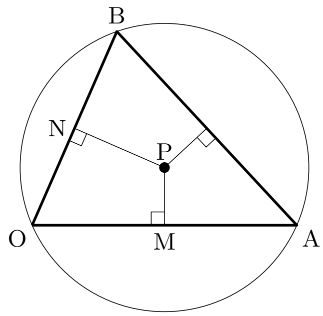
【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	重心

【解答】

$\mathrm{OA}=5,\ \mathrm{OB}=4,\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\sqrt{21}$ より

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2=21$$
$$4^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+5^2=21$$
$$\therefore\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=10$$



外心 P について：

辺 OA，OB の中点をそれぞれ M，N とおく．P は，線分 OA，OB の垂直二等分線の交点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=p\vec{a}+q\vec{b}$ とおくと

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{MP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{NP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}\left(p\vec{a}+q\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\vec{a}=0\\ \left(p\vec{a}+q\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}25p+10q-\dfrac{25}{2}=0\\ 10p+16q-8=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}5p+2q=\dfrac{5}{2}\\ 5p+8q=4\end{cases}$$

$$\therefore\quad p=\frac{2}{5},\quad q=\frac{1}{4}$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} &= |\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos\angle\mathrm{AOP}\\ &= |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}\text{の}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\text{への正射影ベクトル}\ |\\ &= |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OM}}|\end{aligned}$$

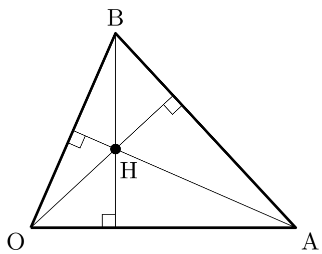
とみて

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OM}}|\\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{ON}}|\end{cases} \iff \begin{cases}\left(p\vec{a}+q\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=5\times\dfrac{5}{2}\\ \left(p\vec{a}+q\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=4\times\dfrac{4}{2}\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}25p+10q=\dfrac{25}{2}\\ 10p+16q=8\end{cases}$$

としてもよい．

垂心 H について：
$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とおくと



$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0\\ (x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{b})\cdot\vec{a}=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}10x+16y-10=0\\ 25x+10y-10=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}5x+8y=5\\ 5x+2y=2\end{cases}$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{5},\quad y=\frac{1}{2}$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

である．

- $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ への正射影ベクトルと $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ への正射影ベクトルと一致し，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ への正射影ベクトルと $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ への正射影ベクトルと一致するから

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{cases} \iff \begin{cases}(x\vec{a}+y\vec{b})\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}\\ (x\vec{a}+y\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}25x+10y=10\\ 10x+16y=10\end{cases}$$

としてもよい．

また，線分 PH を 1 : 2 に内分する点 D は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \frac{2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OH}}}{3} \\ &= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)+\left(\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\right\} \\ &= \frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}\end{aligned}$$

であり，点 D は △OAB の **重心** である． ……(答)

- △OAB において重心は外心 P，垂心 H を結ぶ直線 (オイラー線) 上にあり，線分 PH を 1 : 2 に内分する．この事実を知っていれば，本問の D は重心であり，$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ は直ちに埋まる．空欄 $\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ については

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = 3\,\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PO}}}{3}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})+(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}-2\overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= \vec{a}+\vec{b}-2\left(\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}\right) \\ &= \frac{1}{5}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\end{aligned}$$

とすることができる．