菱(ひし)形 ABCD を底面とする四角錐(すい)O–ABCD を考える．菱形 ABCD の一辺の長さを 3 とし，OA = OC = 5，OB = OD とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = 1$ のとき，次に答えよ．

(1) 菱形 ABCD の対角線の長さ AC，BD を求めよ．

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ．

(3) 三角形 OAB の面積 S を求めよ．

(4) 四角錐 O–ABCD の体積 V を求めよ．

(5) 球 K が四角錐 O–ABCD の 5 つの面に接している．球 K の半径 r を求めよ．

(21 九州工大 工・情報工 3)

【答】

(1) $\mathrm{AC} = 2\sqrt{5}$, $\mathrm{BD} = 4$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 20$

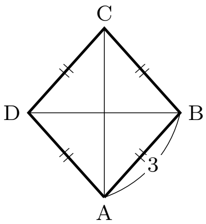
(3) $S = 5\sqrt{2}$

(4) $V = \dfrac{40}{3}$

(5) $r = \dfrac{2}{9}(5\sqrt{2} - \sqrt{5})$

【解答】

(1) 菱形 ABCD の一辺の長さは 3，かつ $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = 1$ より



$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} + |\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 \\ &= 3^2 + 2 \times 1 + 3^2 \\ &= 20 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \mathbf{AC = 2\sqrt{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．また

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 \\ &= 3^2 - 2 \times 1 + 3^2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \mathbf{BD = 4} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

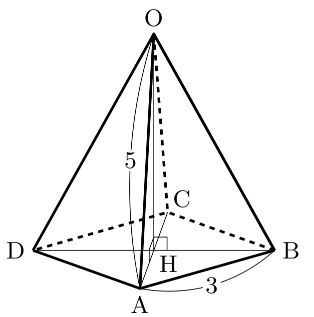
である．

(2) AB = 3 より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = 9$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = 9$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + 5^2 - 9}{2} = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + 16}{2}$$



OA = OC, OB = OD より，O は線分 AC の垂直二等分面上かつ線分 BD の垂直二等分面上にあるから，AC と BD の交点を H とおくと $\mathrm{OH} \perp \mathrm{AC}$ かつ $\mathrm{OH} \perp \mathrm{BD}$ である．

$$\mathrm{OH}^2 = \mathrm{OA}^2 - \mathrm{AH}^2 = 5^2 - (\sqrt{5})^2 = 20$$

$$\mathrm{OB}^2 = \mathrm{OH}^2 + \mathrm{BH}^2 = 20 + 2^2 = 24$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{24+16}{2}=\mathbf{20} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 三角形 OAB の面積 S は

$$\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}\\ &=\frac{1}{2}\sqrt{5^2\times 24-20^2}\\ &=\mathbf{5\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

(4) 四角錐 O–ABCD の体積 V は

$$\begin{aligned} V&=\frac{1}{3}(\text{菱形 ABCD の面積})\times\mathrm{OH}\\ &=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\mathrm{AC}\times\mathrm{BD}\right)\times\mathrm{OH}\\ &=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 4\right)\times\sqrt{20}\\ &=\mathbf{\frac{40}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

(5) 4 つの側面はすべて合同な三角形である．内接球の中心を E とすると，四角錐 O–ABCD は各面を底面とし高さが r となる 5 つの錐に分けられるので

$$V=\frac{r}{3}\{(\text{菱形 ABCD の面積})+4S\}$$

$$\frac{40}{3}=\frac{r}{3}(4\sqrt{5}+4\times 5\sqrt{2})$$

$$\therefore\quad r=\frac{10}{\sqrt{5}+5\sqrt{2}}=\frac{10(5\sqrt{2}-\sqrt{5})}{5^2\times 2-5}=\mathbf{\frac{2}{9}(5\sqrt{2}-\sqrt{5})} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．