実数b, cに対して，空間内の4点O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 1,\ 2)$，B$(1,\ b,\ -1)$，C$(0,\ 1,\ c)$は同一平面上にある．次の各問に答えよ．

(1) cをbで表せ．
(2) 四角形OABCが平行四辺形になるとき，b, cの値を求めよ．
(3) (2)のとき，四角形OABCの面積を求めよ．

(21 宮城大 事業構想・食品業 5)

【答】

(1) $c=\dfrac{3}{1-b}$
(2) $b=2,\ c=-3$
(3) $\sqrt{35}$

【解答】

(1) 4点O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 1,\ 2)$，B$(1,\ b,\ -1)$，C$(0,\ 1,\ c)$は同一平面上にあるので，s, tを実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表すことができる．

$$\begin{aligned}(0,\ 1,\ c)&=s(1,\ 1,\ 2)+t(1,\ b,\ -1)\\&=(s+t,\ s+tb,\ 2s-t)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \begin{cases}s+t=0\\s+tb=1\\2s-t=c\end{cases}\iff\begin{cases}t=-s\\s-sb=1\\2s-(-s)=c\end{cases}\iff\begin{cases}t=-s\\s=\dfrac{1}{1-b}\\c=3s\end{cases}$$

よって

$$\boldsymbol{c=\dfrac{3}{1-b}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

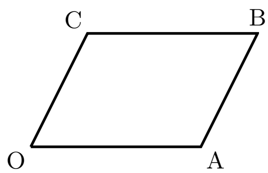
である．

(2) 四角形OABCが平行四辺形であるための条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}\iff(1,\ 1,\ 2)=(1,\ b-1,\ -1-c)$$

$$\iff\begin{cases}1=b-1\\2=-1-c\end{cases}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{b=2,\quad c=-3}\qquad\cdots\cdots(答)$$



である．(これは(1)の結果を満たす．)

(3) 四角形OABCの面積をSとおくと

$$\begin{aligned}S&=2\times\triangle\mathrm{OAC}\\&=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})^2}\end{aligned}$$

である．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 1,\ 2)$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(0,\ 1,\ -3)$より

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{(1+1+4)(0+1+9)-(0+1-6)^2}\\&=\sqrt{60-25}\\&=\boldsymbol{\sqrt{35}}\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．