1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，辺 AB，OB，OC，AC を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点をそれぞれ P，Q，R，S とする．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ および t を用いて表せ．
(2) $\overrightarrow{\mathrm{PS}}=\overrightarrow{\mathrm{QR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$ を示せ．
(3) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ のなす角を求めよ．
(4) 四角形 PQRS の面積を t の式で表し，その最大値を求めよ．

(21 山形大 工 2)

【答】

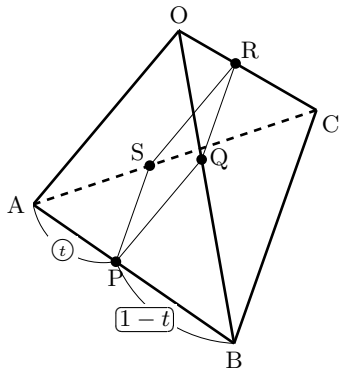
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$
(2) 略
(3) 90°
(4) 面積は $(1-t)t$，最大値は $\dfrac{1}{4}$

【解答】

(1) 与えられた条件より

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}},}$$
$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}},}$$
$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OR}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}},}$$
$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．



(2) (1) より

$$\overrightarrow{\mathrm{PS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=t\overrightarrow{\mathrm{BC}},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{PS}}=\overrightarrow{\mathrm{QR}} \qquad \cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

また

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(t-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{SR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(t-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}} \qquad \cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

である．

- △ABC，△OBC に着目すると

$$\overrightarrow{\mathrm{PS}}=\overrightarrow{\mathrm{QR}}\ (=t\overrightarrow{\mathrm{BC}})$$

が分かり，△OAB，△OAC に着目すると

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}\ (=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AO}})$$

が分かる．

(3) 正四面体 OABC は 1 辺の長さは 1 であり

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=1\times1\times\cos60^\circ=\frac{1}{2}$$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}} &= (t-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot t\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\ &= (t-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot t(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\ &= t(t-1)(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\ &= 0\end{aligned}$$

である．したがって，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ のなす角は

$\mathbf{90^\circ}$ ……(答)

である．

(4) (1)，(2) より，四角形 PQRS は長方形であり，その面積は

$$\begin{aligned}\mathrm{QP}\times\mathrm{QR} &= |(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}||t\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\\ &= \boldsymbol{(1-t)t} \quad (\because\ 0<t<1)\\ &= -\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\end{aligned}$$ ……(答)

であり，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき

最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$ ……(答)

をとる．