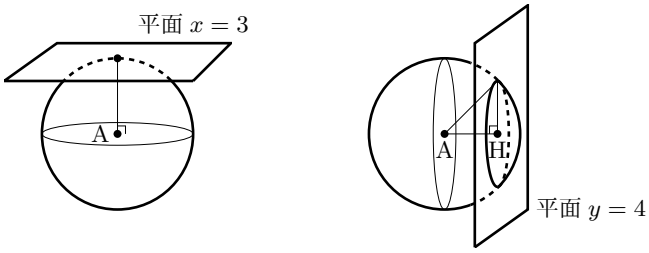
点 $(-1,\ 2,\ 3)$ を中心とする球が平面 $x=3$ と接しているとき，この球が平面 $y=4$ と交わってできる円の中心と半径を求めよ．

(21 兵庫医大 1(2))

【答】 中心 $(-1,\ 4,\ 3)$，半径 $2\sqrt{3}$

【解答】

球の中心を A とおくと，A の座標は $(-1,\ 2,\ 3)$ である．



球と平面 $x=3$ が接するから

$$\begin{aligned}(\text{球の半径}) &= (\text{A と平面 } x=3 \text{ の距離})\\ &= |3-(\text{A の } x \text{ 座標})|\\ &= |3-(-1)|\\ &= 4\end{aligned}$$

である．A から平面 $y=4$ に下ろした垂線の足 (交円の中心) を H とおくと

$$\mathrm{AH} = |4-(\text{A の } y \text{ 座標})| = |4-2| = 2$$

よって

$$(\text{円の半径}) = \sqrt{4^2-2^2} = \boldsymbol{2\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．また，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ と同じ向きの単位ベクトルは $(0,\ 1,\ 0)$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2(0,\ 1,\ 0)\\ &= (-1,\ 2,\ 3) + 2(0,\ 1,\ 0)\\ &= (-1,\ 4,\ 3)\end{aligned}$$

であるから，円の中心 H の座標は

$$\boldsymbol{(-1,\ 4,\ 3)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 点 $\mathrm{A}(-1,\ 2,\ 3)$ を中心とする球 S が平面 $x=3$ と接するから

  $$(\text{球の半径}) = (\text{A と平面 } x=3 \text{ の距離}) = |3-(-1)| = 4$$

  である．したがって，S の方程式は

  $$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = 4^2$$

  であり，S と平面 $y=4$ との交わりの円は

  $$\begin{cases} y=4 \\ (x+1)^2+(4-2)^2+(z-3)^2 = 4^2 \end{cases}$$

  $$\therefore \quad \begin{cases} y=4 \\ (x+1)^2+(z-3)^2 = (2\sqrt{3})^2 \end{cases}$$

  と表される．よって，円の中心，半径は

  中心 $(-1,\ 4,\ 3)$，半径 $2\sqrt{3}$

  である．