体積が $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$ の直円錐において，直円錐の側面積の最小値を求めよ．ただし直円錐とは，底面の円の中心と頂点とを結ぶ直線が，底面に垂直である円錐のことである．

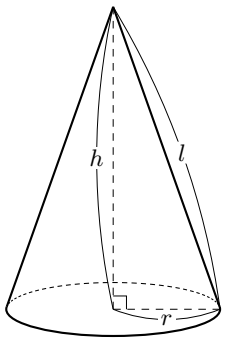
(21 札幌医大 1(3))

【答】 $\sqrt{3}\pi$

【解答】

直円錐の高さを h，底面の円の半径を r，母線の長さを l とおくと

$$r^2+h^2=l^2 \qquad \cdots\cdots ①$$



である．体積が $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$ なので

$$\frac{1}{3}\times\pi r^2\times h=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$$

$$\therefore\quad h=\frac{\sqrt{2}}{r^2} \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．側面を展開すると扇形であり，側面積 S は

$$\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}(\text{扇形の半径})(\text{扇形の弧の長さ})\\
&=\frac{1}{2}(\text{扇形の半径})(\text{底円の周の長さ})\\
&=\frac{1}{2}\times l\times 2\pi r\\
&=\pi r\sqrt{r^2+h^2} \quad (\because\ ①)\\
&=\pi r\sqrt{r^2+\frac{2}{r^4}} \quad (\because\ ②)\\
&=\pi\sqrt{r^4+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2}}\\
&\geqq \pi\sqrt{3\sqrt[3]{r^4\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{r^2}}} \quad (\because\ \text{相加平均・相乗平均の関係})\\
&=\sqrt{3}\pi
\end{aligned}$$

等号は $r^4=\dfrac{1}{r^2}$ すなわち $r=1\ (>0)$ のとき成り立つ．

よって，S は $r=1$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\sqrt{3}\pi}$ をとる． ……(答)

- $r^4+\dfrac{2}{r^2}$ の最小値は微分法を利用してもよい．