実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す．次の値を求めよ．

$$\left[\sqrt{\sqrt[3]{3}+\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1}}\right]$$

(22 富山大 理・工・都市 1(3))

【答】 2

【解答】

$a=\sqrt[3]{3}$ とおくと

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{3}+\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1} &= a+\frac{2}{a-1}\\ &= a+\frac{2}{a-1}\cdot\frac{a^2+a+1}{a^2+a+1}\\ &= a+\frac{2(a^2+a+1)}{a^3-1}\\ &= a+\frac{2(a^2+a+1)}{3-1} \quad (\because\ a^3=3)\\ &= a^2+2a+1\\ &= (a+1)^2\end{aligned}$$

である．$a+1>0$ より

$$\sqrt{\sqrt[3]{3}+\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1}}=a+1=\sqrt[3]{3}+1$$

ここで，$1<3<8$ より，

$$1<\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}<2 \qquad \therefore\quad 2<\sqrt[3]{3}+1<3$$

よって，$\sqrt[3]{3}+1$ を超えない最大の整数は 2 であるから

$$\boldsymbol{\left[\sqrt{\sqrt[3]{3}+\frac{2}{3\sqrt{3}-1}}\right]=2}$$ ……(答)

である．