

3つの実数 x, y, z は, $x - 2y + 3z = 5$, $\frac{xy}{3} + yz - \frac{zx}{2} = 4$ を満たすとする. このとき, $x^2 + 4y^2 + 9z^2$ の値を求めよ.

(22 茨城大 工 2(1))

【答】 73

【解答】

$X = x, Y = -2y, Z = 3z$ とおくと

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ \frac{xy}{3} + yz - \frac{zx}{2} = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} X + Y + Z = 5 \\ \frac{X}{3} \left(-\frac{Y}{2}\right) + \left(-\frac{Y}{2}\right) \cdot \frac{Z}{3} - \frac{Z}{3} \cdot \frac{X}{2} = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} X + Y + Z = 5 \\ XY + YZ + ZX = -24 \end{cases} \end{aligned}$$

である. $x^2 + 4y^2 + 9z^2$ を X, Y, Z で表すと

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 + 9z^2 &= X^2 + Y^2 + Z^2 \\ &= (X + Y + Z)^2 - 2(XY + YZ + ZX) \\ &= 5^2 - 2 \cdot (-24) \\ &= \mathbf{73} \end{aligned}$$

……(答)

である.