k を実数の定数とし

$$f(x) = x^3 - (2k-1)x^2 + (k^2-k+1)x - k + 1$$

とする．

(1) $f(k-1)$ の値を求めよ．

(2) $|k| < 2$ のとき，不等式 $f(x) \geqq 0$ を解け．

(22 北海道大 文 1)

【答】

(1) 0

(2) $x \geqq k-1$

【解答】

$$f(x) = x^3 - (2k-1)x^2 + (k^2-k+1)x - k + 1$$

(1) $x = k-1$ を代入すると

$$\begin{aligned} f(k-1) &= (k-1)^3 - (2k-1)(k-1)^2 + (k^2-k+1)(k-1) - (k-1) \\ &= (k-1)\{(k-1)^2 - (2k-1)(k-1) + (k^2-k+1) - 1\} \\ &= (k-1)\{(k-1)^2 - (2k-1)(k-1) + k(k-1)\} \\ &= (k-1)^2\{(k-1) - (2k-1) + k\} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

……(答)

である．

(2) (1) の結果より，$f(x)$ は $x-(k-1)$ を因数にもつこと (因数定理) に注意する．組立除法を用いて割り算を実行すると

$$\begin{array}{c|cccc} k-1 & 1 & -2k+1 & k^2-k+1 & -k+1 \\ & & k-1 & -k^2+k & k-1 \\ \hline & 1 & -k & 1 & 0 \end{array}$$

であり

$$\begin{aligned} f(x) &= \{x-(k-1)\}(x^2-kx+1) \\ &= \{x-(k-1)\}\left\{\left(x-\frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2-4}{4}\right\} \end{aligned}$$

となる．ここで，$|k| < 2$ のとき，$k^2-4 < 0$ であるから，すべての実数 x に対して

$$\left(x-\frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2-4}{4} > 0$$

であり

$$f(x) \geqq 0 \iff x-(k-1) \geqq 0$$

である．よって，求める解は

$$\boldsymbol{x \geqq k-1}$$

……(答)

である．