不等式 $\sqrt{x+1} < \dfrac{6}{x}$ を解け.

(22 東京都市大 情報・建築都市デザイン・理工 2(2))

【答】 $0 < x < 3$

【解答】

$$\sqrt{x+1} < \frac{6}{x} \qquad \cdots\cdots ①$$

定義域は $\begin{cases} x \geqq -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$ であるが，① において，(左辺) $\geqq 0$ であるから，(右辺) > 0 であり $x > 0$ の範囲で考える．このとき

$$\begin{aligned} ① &\iff x\sqrt{x+1} < 6 \\ &\iff x^2(x+1) < 36 \quad (\because\ x\sqrt{x+1} > 0) \\ &x^3 + x^2 - 36 < 0 \\ &(x-3)(x^2+4x+12) < 0 \end{aligned}$$

ここで

$$x^2 + 4x + 12 = (x+2)^2 + 8 > 0$$

であるから

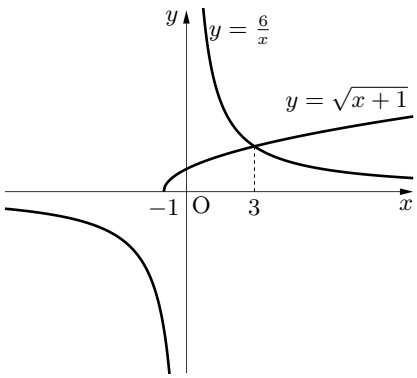
$$x < 3$$

$x > 0$ とあわせて

$$\boldsymbol{0 < x < 3} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.

- $y = \sqrt{x+1}$ と $y = \dfrac{6}{x}$ のグラフは右図となり，① の解は

  $$0 < x < 3$$

  である.