不等式 $k(x^2+x+1)>x+1$ が全ての実数 x について成り立つような実数 k の値の範囲を求めなさい．

(22 福島大 人間発達文化 1(3))

【答】 $k>1$

【解答】

$$k(x^2+x+1)>x+1$$

$k=0$ とすると，$0>x+1$ となるが，すべての実数 x についてこの不等式が成り立つわけではないので，$k\neq 0$ である．

x についての 2 次不等式

$$kx^2+(k-1)x+(k-1)>0$$

がすべての実数 x について成り立つ条件は

$$\begin{cases} k>0 \\ (\text{判別式})<0 \end{cases}$$

である．

$$\begin{aligned}(\text{判別式}) &= (k-1)^2-4k(k-1) \\ &= (k-1)(-3k-1)\end{aligned}$$

なので，求める k の値の範囲は

$$\begin{cases} k>0 \\ k<-\dfrac{1}{3} \text{ または } 1<k \end{cases} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{k>1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ なので，与えられた不等式は

  $$k>\frac{x+1}{x^2+x+1}$$

  となる．$g(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ とおくと，この不等式がすべての実数 x について成り立つ条件は

  $$k>(g(x)\text{ の最大値})$$

  である．つねに (分母) >0 なので，$g(x)$ の最大値は $x+1>0$ の範囲にある．$t=x+1$ とおくと $t\neq 0$ より

  $$g(x)=\frac{t}{(t-1)^2+(t-1)+1}=\frac{t}{t^2-t+1}=\frac{1}{t-1+\dfrac{1}{t}}$$

  $t>0$ より相加平均・相乗平均の関係を用いると

  $$g(x)\leqq\frac{1}{2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}-1}=1$$

  等号は $t=\dfrac{1}{t}$ のとき，すなわち $t=1\ (>0)$ のとき成り立つ．$g(x)$ の最大値は 1 であり，k の値の範囲は $k>1$ である．