$p,\ q$ を実数とする．

花子さんと太郎さんは，次の二つの 2 次方程式について考えている．

$$x^2+px+q=0 \qquad \cdots\cdots ①$$
$$x^2+qx+p=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

① または ② を満たす実数 x の個数を n とおく．

(1) $p=4,\ q=-4$ のとき，$n=$ $\boxed{\text{ア}}$ である．

また，$p=1,\ q=-2$ とき，$n=$ $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) $p=-6$ のとき，$n=3$ になる場合を考える．

花子：例えば，① と ② をともに満たす実数 x があるときは $n=3$ になりそうだね．

太郎：それを α としたら，$\alpha^2-6\alpha+q=0$ と $\alpha^2+q\alpha-6=0$ が成り立つよ．

花子：なるほど．それならば，α^2 を消去すれば，α の値が求められそうだね．

太郎：確かに α の値が求まるけど，実際に $n=3$ となっているかどうかの確認が必要だね．

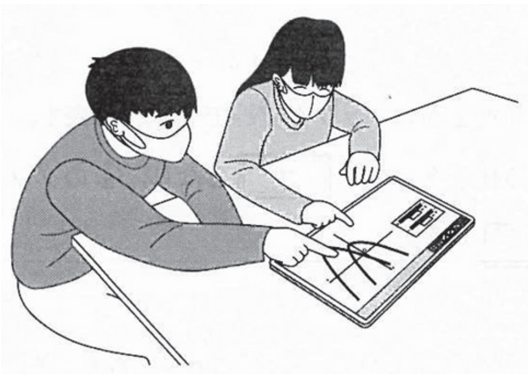
花子：これ以外にも $n=3$ となる場合がありそうだね．

$n=3$ となる q 値は

$$q=\boxed{\text{ウ}},\quad \boxed{\text{エ}}$$

である．ただし，$\boxed{\text{ウ}}<\boxed{\text{エ}}$ とする．

(3) 花子さんと太郎さんは，グラフ表示ソフトを用いて，①, ② の左辺を y とおいた 2 次関数 $y=x^2+px+q$ と $y=x^2+qx+p$ のグラフの動きを考えている．

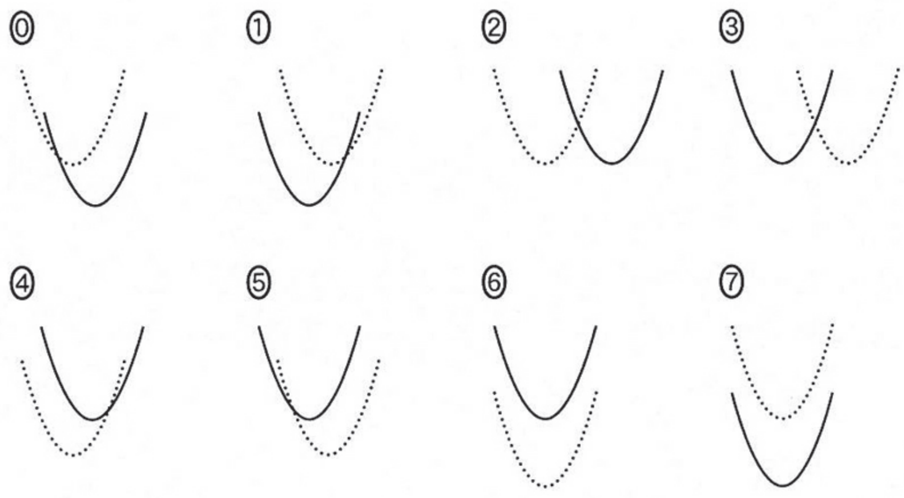


$p=-6$ に固定したまま，q の値だけを変化させる．

$$y=x^2-6x+q \qquad \cdots\cdots ③$$
$$y=x^2+qx-6 \qquad \cdots\cdots ④$$

の二つのグラフについて，$q=1$ のときのグラフを点線で，q 値を 1 から増加させたときのグラフを実線でそれぞれ表す．このとき，③ のグラフの移動の様子を示すと $\boxed{\text{オ}}$ となり，④ のグラフの移動の様子を示すと $\boxed{\text{カ}}$ となる．

$\boxed{\text{オ}}$, $\boxed{\text{カ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪〜⑦ のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．なお，x 軸と y 軸は省略しているが，x 軸は右方向，y 軸は上方向がそれぞれ正の方向である．



(4) $\boxed{\text{ウ}} < q < \boxed{\text{エ}}$ とする．全体集合 U を実数全体の集合とし，U の部分集合 A, B を

$$A = \{x \mid x^2 - 6x + q < 0\}$$
$$B = \{x \mid x^2 + qx - 6 < 0\}$$

とする．U の部分集合 X に対し，補集合を $\overline{X}$ と表す．このとき，次のことが成り立つ．

- $x \in A$ は，$x \in B$ であるための $\boxed{\text{キ}}$．
- $x \in B$ は，$x \in \overline{A}$ であるための $\boxed{\text{ク}}$．

$\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい．)

⓪ 必要条件であるが，十分条件ではない
① 十分条件であるが．必要条件ではない
② 必要十分条件である
③ 必要条件でも十分条件でもない

(22 共通テスト 第 1 日程 IA 2[1] I 3[2])

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
3	2	5	9	6	1	3	1

【解答】

$$x^2 + px + q = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$
$$x^2 + qx + p = 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) $p=4,\ q=-4$ のとき

$$①: x^2+4x-4=0 \qquad 解の公式より \quad x=-2\pm 2\sqrt{2}$$
$$②: x^2-4x+4=0 \qquad \therefore \quad (x-2)^2=0 \qquad \therefore \quad x=2\ (重解)$$

であり，① または ② を満たす実数 x の個数 n は **3** である． ……(答)

$p=1,\ q=-2$ のとき

$$①: x^2+x-2=0 \qquad \therefore \quad (x+2)(x-1)=0 \qquad \therefore \quad x=-2,\ 1$$
$$②: x^2-2x+1=0 \qquad \therefore \quad (x-1)^2=0 \qquad \therefore \quad x=1\ (重解)$$

であり，① または ② を満たす実数 x の個数 n は **2** である． ……(答)

(2) $p=-6$ のとき

$$x^2-6x+q=0 \qquad \cdots\cdots ①'$$
$$x^2+qx-6=0 \qquad \cdots\cdots ②'$$

$n=3$ となるのは

(i) ①$'$, ②$'$ がともに異なる 2 つの実数解をもち，1 つの共通解をもつ

(ii) ①$'$, ②$'$ の一方が異なる 2 つの実数解をもち，他方が重解をもつをもち，共通解をもたない

のいずれかである．

(i) のとき，共通解を α とおくと

$$\alpha^2-6\alpha+q=0 \qquad \cdots\cdots ①''$$
$$\alpha^2+q\alpha-6=0 \qquad \cdots\cdots ②''$$

①$''$ − ②$''$ として，α^2 を消去すると

$$(-6-q)\alpha+q+6=0 \qquad \therefore \quad (q+6)(1-\alpha)=0$$

$q=-6$ とすると，①$'$, ②$'$ は一致し，$n=3$ とならない．したがって，$\alpha=1$ であり，①$''$, ②$''$ はともに $1^2-6+q=0$ となり $q=5$ である．このとき

$$①': x^2-6x+5=0 \qquad \therefore \quad (x-1)(x-5)=0 \qquad \therefore \quad x=1,\ 5$$
$$②': x^2+5x-6=0 \qquad \therefore \quad (x+6)(x-1)=0 \qquad \therefore \quad x=-6,\ 1$$

であり，$n=3$ を満たす．

(ii) のとき，判別式を調べると

$$①'の判別式: D_1/4=9-q$$
$$②'の判別式: D_2=q^2+24>0$$

であり，$q=9$ のとき

$$①': x^2-6x+9=0 \qquad \therefore \quad (x-3)^2=0 \qquad \therefore \quad x=3\ (重解)$$
$$②': x^2+9x-6=0 \qquad 解の公式より \qquad x=\frac{-9\pm\sqrt{105}}{2}$$

$n=3$ を満たす．

(i), (ii) より，$n=3$ となる q の値は

$$\boldsymbol{q=5,\ 9}$$ ……(答)

である．

(3)
$$y=x^2-6x+q \qquad \cdots\cdots ③$$
$$y=x^2+qx-6 \qquad \cdots\cdots ④$$

q の値が 1 増えるとき，③ のグラフは y 軸方向に 1 だけ平行移動するから，この移動の様子を表している (点線のグラフが 1 だけ上に移動して実線のグラフになっている) のは (⑥) である． ……(答)

④ のグラフは，q の値にかかわらず点 $(0,\ -6)$ を通る．q の値が 1 増えるとき，④ は

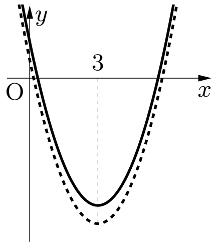
$$y=x^2+qx-6=\left(x+\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{q}{2}\right)^2-6$$

から

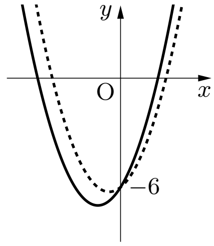
$$y=x^2+(q+1)x-6=\left(x+\frac{q+1}{2}\right)^2-\left(\frac{q+1}{2}\right)^2-6$$

に変化する．頂点は $\left(-\frac{q}{2},\ -\left(\frac{q}{2}\right)^2-6\right)\longrightarrow\left(-\frac{q+1}{2},\ -\left(\frac{q+1}{2}\right)^2-6\right)$ と左下に移動するから，この移動の様子を表している (点線のグラフが左下に移動して実線のグラフになっている) のは　(①)　である．　……(答)

- $q=1$ のときのグラフを点線，$q=2$ のときのグラフを実線で表すと，下図となる．



③ のグラフ



④ のグラフ

(4) $5<q<9$ のとき，方程式 ①′，②′ の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とおくと

$$D_1/4=9-q>0$$
$$D_2=q^2+24>0$$

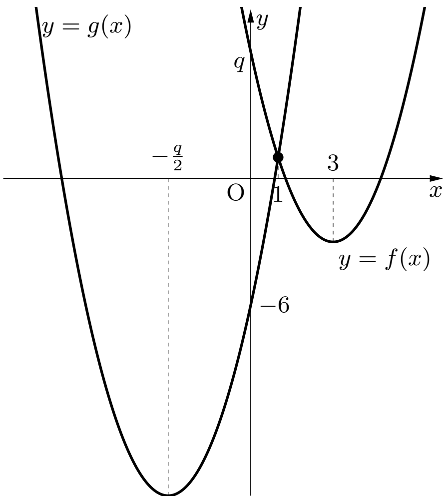
であり，ともに異なる 2 つの実数解をもつ．それぞれの解を s_1，s_2 $(s_1<s_2)$，t_1，t_2 $(t_1<t_2)$ とおくと

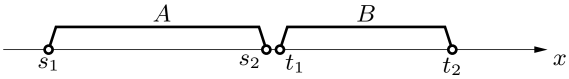
$$\begin{aligned}A&=\{x\,|\,x^2-6x+q<0\}\\&=\{x\,|\,s_1<x<s_2\},\\B&=\{x\,|\,x^2+qx-6<0\}\\&=\{x\,|\,t_1<x<t_2\}\end{aligned}$$

である．2 次関数 ③，④ の右辺をそれぞれ $f(x)$，$g(x)$ とおくと

$$f(1)=g(1)=q-5>0$$

であるから，軸の位置も考えると $s_2<t_1$ である．したがって，集合 A，B を数直線上にとると下図となる．





これより，命題の真偽は

$$x\in A \overset{\times}{\underset{\times}{\rightleftarrows}} x\in B$$

であり，$x\in A$ は，$x\in B$ であるための 必要条件でも十分条件でもない．　(③)　　……(答)

また

$$x\in B \overset{\bigcirc}{\underset{\times}{\rightleftarrows}} x\in \overline{A}$$

であり，$x\in B$ は，$x\in\overline{A}$ であるための 十分条件であるが必要条件ではない．　(①)

……(答)