$f(x)=\log\dfrac{x}{1-x}$ とする．関数 $f(x)$ の逆関数は $f^{-1}(x)=$ $\boxed{\text{(エ)}}$ である．方程式 $f^{-1}(x)-a=0$ が実数解をもつとき，定数 a のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{(オ)}}$ である．方程式 $\{f^{-1}(x)\}^2-bf^{-1}(x)-3b=0$ が実数解をもつとき，定数 b のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{(カ)}}$ である．

(22 北里大 医 1(2))

【答】

(エ)	(オ)	(カ)
$\dfrac{e^x}{1+e^x}$	$0<a<1$	$0<b<\dfrac{1}{4}$

【解答】

$$f(x)=\log\frac{x}{1-x}$$

$y=\log\dfrac{x}{1-x}$ …… ① を x について解くと

$$① \iff \frac{x}{1-x}=e^y \iff x=e^y(1-x) \iff (1+e^y)x=e^y$$

$$\therefore\quad x=\frac{e^y}{1+e^y}$$

よって，$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ は

$$f^{-1}(x)=\boldsymbol{\frac{e^x}{1+e^x}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

方程式 $f^{-1}(x)-a=0$ が実数解をもつ条件は，$f^{-1}(x)=a$ を満たす実数 x が存在すること，すなわち，a が $f^{-1}(x)$ の値域に含まれることである．

$f^{-1}(x)$ の値域は $f(x)$ の定義域であり，$f(x)$ の定義域は真数条件より

$$\frac{x}{1-x}>0 \iff x(1-x)>0$$

$$\therefore\quad 0<x<1$$

であるから，a のとり得る値の範囲は

$$\boldsymbol{0<a<1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

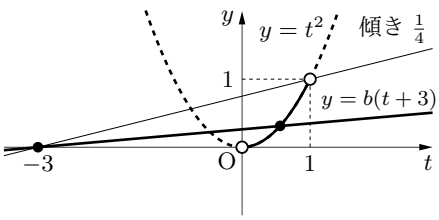
である．

方程式 $\{f^{-1}(x)\}^2-bf^{-1}(x)-3b=0$ が実数解をもつ条件は，$t=f^{-1}(x)$ とおくと

$$t^2-bt-3b=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

であり，② が $0<t<1$ を満たす実数解をもつことである．

② は $t^2=b(t+3)$ と変形できるから，ty 平面において，放物線 $y=t^2$ と直線 $y=b(t+3)$ が $0<t<1$ の範囲で共有点をもつような b の値の範囲を求める．直線 $y=b(t+3)$ が点 $(1,\ 1)$ を通るとき



$$1=b(1+3)$$

$$\therefore\quad b=\frac{1}{4}$$

であるから，上図より求める b の値の範囲は

$$\boldsymbol{0<b<\frac{1}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．