整数全体を定義域とし，整数を値にとる関数 $f(x)$ が，次の条件 1，2 を満たしているとする．

条件 1　$f(0)=0$

条件 2　任意の整数 n に対し，$f(3+n)=f(3-n)$ かつ $f(7+n)=f(7-n)$ が成り立つ

整数全体を定義域とする関数 $g(n)$，$h(n)$ をそれぞれ，$g(n)=6-n$，$h(n)=14-n$ とするとき，次の問いに答えなさい．

(1) 合成関数 $(h\circ g)(n)$ と $(g\circ h)(n)$ を求めなさい．

(2) 任意の整数 n に対し，2 つの等式 $(f\circ g)(n)=f(n)$ と $(f\circ h)(n)=f(n)$ が成り立つことを示しなさい．

(3) $f(2022)=0$ であることを示しなさい．

(4) 集合 A を，関数 $f(n)$ のとりうる値全体の集合，すなわち，$A=\{f(n)\,|\,n$ は整数$\}$ とする．このとき，集合 A の要素の個数は 5 以下であることを示しなさい．

(22 山口大 理・医 4)

【答】

(1) $(h\circ g)(n)=n+8$，$(g\circ h)(n)=n-8$
(2) 略
(3) 略
(4) 略

【解答】

(1)
$$g(n)=6-n,\quad h(n)=14-n$$
なので
$$(h\circ g)(n)=h(g(n))=h(6-n)=14-(6-n)=\boldsymbol{n+8} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$
$$(g\circ h)(n)=g(h(n))=g(14-n)=6-(14-n)=\boldsymbol{n-8} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$
である．

(2) 条件 2 より，任意の整数 n に対し
$$(f\circ g)(n)=f(g(n))=f(6-n)=f(3+(3-n))=f(3-(3-n))=f(n)$$
$$(f\circ h)(n)=f(h(n))=f(14-n)=f(7+(7-n))=f(7-(7-n))=f(n)$$
$$\therefore\quad (f\circ g)(n)=f(n),\quad (f\circ h)(n)=f(n)$$
が成り立つ．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　 …… (証明終わり)

(3) (2) より，任意の整数 n に対し
$$(f\circ g)(n)=(f\circ h)(n)$$
なので
$$f(6-n)=f(14-n)$$
が成り立つ．ここで，$m=6-n$ とおくと，n が整数全体を動くとき m も整数全体を動き，$14-n=14-(6-m)=m+8$ なので
$$f(m)=f(m+8)$$

が任意の整数 m に対し成立する．

$f(n)$ は周期 8 の周期関数である．$2022 = 8 \cdot 252 + 6$ であるから

$$\begin{aligned} f(2022) &= f(6) \quad (\because \text{ 周期性}) \\ &= f(3+3) = f(3-3) \quad (\because \text{ 条件 } 2) \\ &= f(0) = 0 \quad (\because \text{ 条件 } 1) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad f(2022) = 0$$ ……(証明終わり)

である．

(4) 集合 A は関数 $f(n)$ のとりうる値全体の集合であり，A の要素の個数は $f(n)$ の周期性から，8 個の整数 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$，$f(5)$，$f(6)$，$f(7)$ の中の異なる値の個数である．

条件 2 の $f(3+n) = f(3-n)$ において，$n = 1$，2，3 とおくと

$$f(4) = f(2),\ f(5) = f(1),\ f(6) = f(0)$$

であるから，A は $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(7)$ の中の異なる値だから，A の要素の個数は 5 以下である． ……(証明終わり)