関数 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$ $(x>0)$ に対して

$$f_1(x)=f(x),\quad f_n(x)=(f\circ f_{n-1})(x)\quad (n=2,\ 3,\ \cdots)$$

とおく．次の (i), (ii) に答えよ．

(i) $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ を求めよ．
(ii) 自然数 n に対して $f_n(x)$ の式を推測し，その結果を数学的帰納法を用いて証明せよ．

(22 札幌医大 1(3))

【答】

(i) $f_2(x)=\dfrac{5x+4}{4x+5}$, $f_3(x)=\dfrac{14x+13}{13x+14}$, $f_4(x)=\dfrac{41x+40}{40x+41}$

(ii) $f_n(x)=\dfrac{\dfrac{3^n+1}{2}x+\dfrac{3^n-1}{2}}{\dfrac{3^n-1}{2}x+\dfrac{3^n+1}{2}}$ と推定．証明は略．

【解答】

$$f(x)=\frac{2x+1}{x+2}\ (x>0)$$

$$f_1(x)=f(x)$$

$$f_n(x)=(f\circ f_{n-1})(x)=f(f_{n-1}(x))=\frac{2f_{n-1}(x)+1}{f_{n-1}(x)+2}\quad (n=2,\ 3,\ \cdots)$$

(i) 定義に従い順次計算すると

$$f_2(x)=\frac{2f_1(x)+1}{f_1(x)+2}=\frac{2\cdot\dfrac{2x+1}{x+2}+1}{\dfrac{2x+1}{x+2}+2}=\boldsymbol{\frac{5x+4}{4x+5}}\quad\cdots\cdots(答)$$

$$f_3(x)=\frac{2f_2(x)+1}{f_2(x)+2}=\frac{2\cdot\dfrac{5x+4}{4x+5}+1}{\dfrac{5x+4}{4x+5}+2}=\boldsymbol{\frac{14x+13}{13x+14}}\quad\cdots\cdots(答)$$

$$f_4(x)=\frac{2f_3(x)+1}{f_3(x)+2}=\frac{2\cdot\dfrac{14x+13}{13x+14}+1}{\dfrac{14x+13}{13x+14}+2}=\boldsymbol{\frac{41x+40}{40x+41}}\quad\cdots\cdots(答)$$

である．

(ii) $f_n(x)=\dfrac{a_nx+b_n}{b_nx+a_n}$ と推定すると，$f_1(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$ より $a_1=2$, $b_1=1$ である．このとき

$$f_{n+1}(x)=\frac{2f_n(x)+1}{f_n(x)+2}=\frac{2\cdot\dfrac{a_nx+b_n}{b_nx+a_n}+1}{\dfrac{a_nx+b_n}{b_nx+a_n}+2}=\frac{(2a_n+b_n)x+a_n+2b_n}{(a_n+2b_n)x+2a_n+b_n}$$

であり

$$\begin{cases}a_{n+1}=2a_n+b_n, & a_1=2\\ b_{n+1}=a_n+2b_n, & b_1=1\end{cases}$$

が成り立つ．この連立漸化式を解く．

$$a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$$
$$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$$

と変形されるから

$$a_n+b_n=(2+1)3^{n-1}=3^n$$
$$a_n-b_n=2-1=1$$

であり

$$a_n=\frac{3^n+1}{2},\quad b_n=\frac{3^n-1}{2}$$

を得る．すなわち

$$f_n(x)=\frac{\dfrac{3^n+1}{2}x+\dfrac{3^n-1}{2}}{\dfrac{3^n-1}{2}x+\dfrac{3^n+1}{2}}\qquad\cdots\cdots\ (*)$$

と推定される．すべての自然数 n について $(*)$ が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(I) $n=1$ のとき，$(*)$ の右辺は

$$\frac{\dfrac{3+1}{2}x+\dfrac{3-1}{2}}{\dfrac{3-1}{2}x+\dfrac{3+1}{2}}=\frac{2x+1}{x+2}$$

であり，$f(x)$ と一致するから，$n=1$ のとき $(*)$ は成り立つ．

(II) $n=k$ での成立を仮定する．

$$f_{k+1}(x)=\frac{2f_k(x)+1}{f_k(x)+2}=\frac{2\cdot\dfrac{\dfrac{3^k+1}{2}x+\dfrac{3^k-1}{2}}{\dfrac{3^k-1}{2}x+\dfrac{3^k+1}{2}}+1}{\dfrac{\dfrac{3^k+1}{2}x+\dfrac{3^k-1}{2}}{\dfrac{3^k-1}{2}x+\dfrac{3^k+1}{2}}+2}$$

$$=\frac{2\left(\dfrac{3^k+1}{2}x+\dfrac{3^k-1}{2}\right)+\left(\dfrac{3^k-1}{2}x+\dfrac{3^k+1}{2}\right)}{\left(\dfrac{3^k-1}{2}x+\dfrac{3^k+1}{2}\right)+2\cdot\left(\dfrac{3^k+1}{2}x+\dfrac{3^k-1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{3^{k+1}+1}{2}x+\dfrac{3^{k+1}-1}{2}}{\dfrac{3^{k+1}-1}{2}x+\dfrac{3^{k+1}+1}{2}}$$

$n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

以上 (I)，(II) より，すべての自然数 n に対して $(*)$ は成り立つ．