2 次関数 $f(x) = -x^2 + 2\sqrt{2}x + 1$ について，次の問いに答えよ．

(1) $-1 \leqq x \leqq 2$ のとき，$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(2) $-1 \leqq x \leqq 2$ のとき，関数 $y = |f(x)| - 3$ の最大値と最小値を求めよ．

(22 東北学院大 文系 A 2)

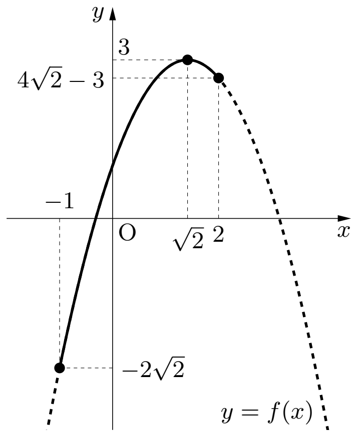
【答】

(1) 最大値 3，最小値 $-2\sqrt{2}$

(2) 最大値 0，最小値 -3

【解答】

$$f(x) = -x^2 + 2\sqrt{2}x + 1$$
$$= -\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + 3$$



(1) $-1 \leqq x \leqq 2$ における $y = f(x)$ のグラフは

$$f(-1) = -2\sqrt{2},\quad f(2) = 4\sqrt{2} - 3$$

に注意すると，右図となる．

よって，$-1 \leqq x \leqq 2$ のとき，$f(x)$ は

$x = \sqrt{2}$ のとき **最大値 3** ……(答)

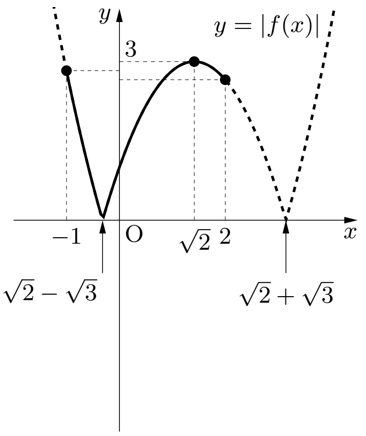
$x = -1$ のとき **最小値 $-2\sqrt{2}$** ……(答)

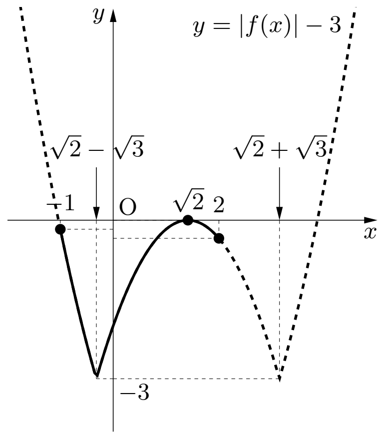
をとる．

(2) $-1 \leqq x \leqq 2$ における $y = |f(x)| - 3$ のグラフは，(1) のグラフの $y < 0$ の部分を x 軸に関して対称移動し (左図)，ついで y 軸方向に -3 だけ平行移動したもの (右図) である．

$$\frac{f(\sqrt{2}) + f(2)}{2} = \frac{3 + (4\sqrt{2} - 3)}{2} = 2\sqrt{2} = -f(-1) = |f(-1)|$$

および $f(x) = 0$ の解が $x = \sqrt{2} \pm \sqrt{3}$ であることに注意して図示すると，下図となる．





よって，$-1 \leqq x \leqq 2$ のとき，$|f(x)| - 3$ は

$x = \sqrt{2}$のとき **最大値 0** ……(答)

$x = \sqrt{2} - \sqrt{3}$のとき **最小値 -3** ……(答)

をとる．