関数 $f(x)=\dfrac{3x+7}{x+3}$ について，次の (i) と (ii) に答えよ．

(i) $y=f(x)$ のグラフをかけ．

(ii) k を実数とする．$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=\dfrac{1}{2}x+k$ の交点が 2 個となるような k の値の範囲を求めよ．

(22 茨城大 工 3(3))

【答】

(1) 略

(2) $k<\dfrac{5}{2}$, $k>\dfrac{13}{2}$

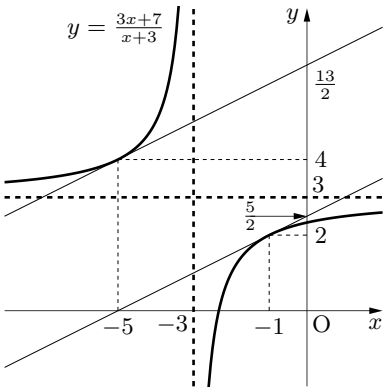
【解答】

(i) $f(x)=\dfrac{3x+7}{x+3}$ を変形すると

$$f(x)=\frac{-2}{x+3}+3$$

であるから，$f(x)=\dfrac{3x+7}{x+3}$ のグラフは，$y=-\dfrac{2}{x}$ のグラフを x 軸方向に -3，y 軸方向に 3 だけ平行移動した直角双曲線で，漸近線は 2 直線 $x=-3$，$y=3$ である．

よって，関数 $f(x)$ の定義域は $x\neq -3$，値域は $y\neq 3$ であり，グラフは右図の太線部分となる．



(ii) $f'(x)=\dfrac{2}{(x+3)^2}$ より，接線の傾きが $\dfrac{1}{2}$ となる点の x 座標は

$$\frac{2}{(x+3)^2}=\frac{1}{2}$$
$$4=(x+3)^2$$
$$(x+5)(x+1)=0$$
$$\therefore\quad x=-5,\ -1$$

$f(-5)=4$, $f(-1)=2$ であるから，傾き $\dfrac{1}{2}$ の接線の方程式は

$x=-5$ のとき，　$y=\dfrac{1}{2}(x+5)+4$　　$\therefore\quad y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{13}{2}$

$x=-1$ のとき，　$y=\dfrac{1}{2}(x+1)+2$　　$\therefore\quad y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

である．よって，$y=f(x)$ と直線の交点が 2 個となる k の値の範囲は

$$\boldsymbol{k<\frac{5}{2},\quad k>\frac{13}{2}}$$ ……(答)

である．

- (1) のグラフの利用を考えて，傾き $\dfrac{1}{2}$ の接線の方程式を求めたが，次のように考えてもよい．

  $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=\dfrac{1}{2}x+k$ の交点が 2 個となる条件は

  $$\frac{3x+7}{x+3}=\frac{1}{2}x+k \qquad \cdots\cdots ㋐$$

が異なる 2 つの実数解をもつことである．

$$
\begin{aligned}
㋐ &\iff 2(3x+7) = (x+3)(x+2k) \quad (\because\ x \neq -3 \text{ であることは確認できる}) \\
&\iff x^2 + (2k-3)x + 6k - 14 = 0 \qquad \cdots\cdots ㋑
\end{aligned}
$$

であるから，求める条件は ㋑ の (判別式) > 0 と言い換えることもできる．

$$
\begin{aligned}
(\text{判別式}) &= (2k-3)^2 - 4(6k-14) \\
&= 4x^2 - 36k + 65 \\
&= (2k-5)(2k-13)
\end{aligned}
$$

であるから，求める条件は

$$k < \frac{5}{2}, \quad k > \frac{13}{2}$$

である．