以下の条件 A, B, C, D は，整数 m と n に関する条件である．

条件 A　$\sin\dfrac{m\pi}{2} = \cos\dfrac{n\pi}{2}$

条件 B　$|n^2-(m-1)^2|$ が 4 の倍数である．

条件 C　$\left|\dfrac{m+n+1}{2}\right|$ が奇数である．

条件 D　x についての方程式 $x^2+(n-m+1)(x+1)=0$ が重解をもつ．

このとき，以下の空欄に当てはまるものを語群から選び解答欄に (a)〜(d) を 1 つずつ記入しなさい．また，(1) と (2) については，それが成り立つことを証明しなさい．

語群　(a) 必要十分条件である．

(b) 必要条件であるが，十分条件ではない．

(c) 十分条件であるが，必要条件ではない．

(d) 必要条件でも十分条件でもない．

(1) m と n が条件 B を満たすことは，m と n が条件 A を満たすための $\boxed{\quad\quad}$

(2) m と n が条件 C を満たすことは，m と n が条件 D を満たすための $\boxed{\quad\quad}$

(3) m と n が条件 C を満たすことは，m と n が条件 A を満たすための $\boxed{\quad\quad}$

(4) m と n が条件 D を満たすことは，m と n が条件 A を満たすための $\boxed{\quad\quad}$

(22 公立千歳科技大 中期 理工 3)

【答】

(1) (b)　　(2) (d)　　(3) (c)　　(4) (c)

【解答】

(1) B $\overset{\times}{\underset{\circ}{\rightleftarrows}}$ A

($\longrightarrow$ の反例) $m=1$, $n=2$ とおくと，$|2^2-(1-1)^2|=4$ となり条件 B は成り立つが，$\sin\dfrac{m\pi}{2}=1$，$\cos\dfrac{n\pi}{2}=-1$ であり条件 A は成り立たない．

($\longleftarrow$ の証明) $\sin\dfrac{m\pi}{2}=\cos\dfrac{n\pi}{2} \iff \sin\dfrac{m\pi}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{n}{2}\pi\right)$

$$\therefore\ \frac{m\pi}{2}=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{n\pi}{2}\right)+2k\pi \text{ または } \pi-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{n\pi}{2}\right)+2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$$\therefore\ m+n=4k+1 \text{ または } m-n=4k+1$$

である．

$$|n^2-(m-1)^2|=|(n+m-1)(n-m+1)|$$

であるから

$m+n=4k+1$ のとき，$n+m-1=(4k+1)-1=4k$

$m-n=4k+1$ のとき，$n-m+1=-(4k+1)+1=-4k$

であり，$n+m-1$ と $n-m+1$ の一方は必ず 4 の倍数であり条件 B は成り立つ．

よって，m, n が条件 B を満たすことは，m と n が条件 A を満たすための

必要条件であるが，十分条件ではない．(b)　……(答)

(2) $\mathrm{C}\ \overset{\times}{\underset{\times}{\rightleftarrows}}\ \mathrm{D}$

$(\longrightarrow$ の反例$)$ $m=0,\ n=1$ とおくと，$\left|\dfrac{0+1+1}{2}\right|=1$ となり条件 C が成り立つが，方程式 $x^2+(1-0+1)x+2=0$ の判別式は $2^2-4\cdot 2=-4 \fallingdotseq 0$ であり重解をもたないので条件 D は成り立たない．

$(\longleftarrow$ の反例$)$ $m=0,\ n=3$ とおくと，方程式は

$$x^2+4x+4=0 \qquad \therefore\quad (x+2)^2=0 \qquad \therefore\quad x=-2\ (\text{重解})$$

であり条件 D は成り立つが，$\left|\dfrac{m+n+1}{2}\right|=\left|\dfrac{0+3+1}{2}\right|=2$ となり条件 C は成り立たない．

よって，$m,\ n$ が条件 C を満たすことは，$m,\ n$ が条件 D を満たすための

必要条件でも十分条件でもない．(d) ……(答)

(3) $\mathrm{C}\ \overset{\bigcirc}{\underset{\times}{\rightleftarrows}}\ \mathrm{A}$

$(\longrightarrow$ の証明$)$ $\left|\dfrac{m+n+1}{2}\right|=2k+1$ (k は整数) と表されるならば

$$\frac{m+n+1}{2}=\pm(2k+1)$$

$$\frac{m}{2}=\pm(2k+1)-\frac{n+1}{2}$$

である．このとき

$$\sin\frac{m\pi}{2}=\sin\left\{\pm(2k+1)\pi-\frac{n+1}{2}\pi\right\}=\sin\frac{n+1}{2}\pi=\cos\frac{n\pi}{2}$$

である．

$(\longleftarrow$ の反例$)$ $m=0,\ n=3$ のとき，$\sin\dfrac{m\pi}{2}=\cos\dfrac{n\pi}{2}=0$ となり条件 A は成り立つが，$\left|\dfrac{m+n+1}{2}\right|=\left|\dfrac{0+3+1}{2}\right|=2$ となり条件 C は成り立たない．

よって，$m,\ n$ が条件 C を満たすことは，$m,\ n$ が条件 A を満たすための

十分条件であるが，必要条件ではない．(c) ……(答)

(4) $\mathrm{D}\ \overset{\bigcirc}{\underset{\times}{\rightleftarrows}}\ \mathrm{A}$

$(\longrightarrow$ の証明$)$ 方程式 $x^2+(n-m+1)(x+1)=0$ が重解をもつ条件は

$$(\text{判別式})=0 \iff (n-m+1)^2-4(n-m+1)=0$$

$$\therefore\quad (n-m+1)(n-m-3)=0$$

$$\therefore\quad n-m=-1 \text{ または } 3$$

$$\therefore\quad m=n+1 \text{ または } n-3$$

$m=n+1$ のとき

$$\sin\frac{m\pi}{2}=\sin\frac{(n+1)\pi}{2}=\cos\frac{n\pi}{2}$$

$m=n-3$ のとき

$$\sin\frac{m\pi}{2}=\sin\frac{(n-3)\pi}{2}=\cos\frac{n\pi}{2}$$

であり，いずれのときも条件 A は成り立つ．

$(\longleftarrow$ の反例$)$ $m=0,\ n=1$ のとき，$\sin\dfrac{m\pi}{2}=\cos\dfrac{n\pi}{2}=0$ となり条件 A は成り立つが，方程式 $x^2+(1-0+1)(x+1)=0$ の判別式は $2^2-4\cdot 2=-4$ であり重解をもたないので，条件 D は成り立たない．

よって，$m,\ n$ が条件 D を満たすことは，$m,\ n$ が条件 A を満たすための

十分条件であるが，必要条件ではない．(c) ……(答)