

0 以上 9999 以下の整数を 4 桁で表示し、以下の操作を行うこととする。ただし、4 桁で表示するとは、整数が 100 以上 999 以下の場合は千の位の数字を 0、10 以上 100 以下の場合は千の位と百の位の数字を 0、1 以上 9 以下の場合は千の位と百の位と十の位の数字を 0、そして 0 はどの位の数字も 0 とすることである。

操作：千の位の数字と十の位の数字を入れ替える。さらに、百の位の数字と一の位の数字を入れ替える。

また、整数  $L$  に対し、操作によって得られた整数を  $\overline{L}$  と表す。

- (1)  $M$  を 0 以上 9999 以下の整数とし、 $M = 100x + y$  のように整数  $x, y$  ( $0 \leq x \leq 99, 0 \leq y \leq 99$ ) を用いて表す。操作によって得られた  $\overline{M}$  が  $M$  の  $\frac{2}{3}$  倍に 3 を足した数に等しいならば、 $-197x + 298y = 9$  が成り立つことを証明せよ。
- (2)  $N$  が 0 以上 9999 以下の整数ならば、操作によって得られた整数  $\overline{N}$  は  $N$  の  $\frac{2}{3}$  倍に 1 を足した数と等しくなることを証明せよ。

(22 千葉大 4)

【答】

- (1) 略  
(2) 略

【解答】

操作は「4 桁の数の上 2 桁と下 2 桁を入れ替える」ということである。

- (1) 0 以上 9999 以下の整数  $M = 100x + y$  ( $0 \leq x \leq 99, 0 \leq y \leq 99$ ) のとき

$$\overline{M} = 100y + x$$

であるから

$$\overline{M} = \frac{2}{3}M + 3$$

ならば

$$100y + x = \frac{2}{3}(100x + y) + 3$$

$$300y + 3x = 2(100x + y) + 9$$

$$\therefore -197x + 298y = 9$$

が成り立つ。

…… (証明終わり)

- (2) 0 以上 9999 以下の整数  $N$  を  $N = 100x + y$  ( $0 \leq x \leq 99, 0 \leq y \leq 99$ ) と表すと

$$\overline{N} = 100y + x$$

である。 $\overline{N} = \frac{2}{3}N + 1$  とならないことを背理法で示す。

$\overline{N} = \frac{2}{3}N + 1$  が成り立つと仮定すると

$$100y + x = \frac{2}{3}(100x + y) + 1$$

$$300y + 3x = 2(100x + y) + 3$$

$$\therefore -197x + 298y = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

互除法を実行すると右のようになり、298 と 197 は互いに素である

$$298 = 197 \cdot 1 + 101$$

$$197 = 101 \cdot 1 + 96$$

$$101 = 96 \cdot 1 + 5$$

$$96 = 5 \cdot 19 + 1$$

1	298	197	1
	197	101	
1	101	96	19
	96	95	
5	5	1	
	5		
	0		

であり

$$1 = 96 - 5 \cdot 19$$

$$= 96 - (101 - 96 \cdot 1) \cdot 19 = 96 \cdot 20 - 101 \cdot 19$$

$$= (197 - 101 \cdot 1) \cdot 20 - 101 \cdot 19 = 197 \cdot 20 - 101 \cdot 39$$

$$= 197 \cdot 20 - (298 - 197 \cdot 1) \cdot 39 = 197 \cdot 59 - 298 \cdot 39$$

$$\therefore 197 \cdot 59 - 298 \cdot 39 = 1$$

$$\therefore 197 \cdot 177 - 298 \cdot 117 = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ② の辺々を引くと

$$-197(x + 177) + 298(y + 117) = 0$$

$$197(x + 177) = 298(y + 117)$$

298 と 197 は互いに素であるから

$$x + 177 = 298k$$

となる整数  $k$  が存在する (このとき  $y + 117 = 197k$  である).

$$x = 298k - 177$$

であるが

$$k \leq 0 \text{ のとき } x \leq -177$$

$$1 \leq k \text{ のとき } x \geq 121$$

であり,  $0 \leq x \leq 99$  となる  $x$  は存在しない.

よって,  $\overline{N} = \frac{2}{3}N + 1$  を満たす  $N$  は存在しない.

…… (証明終わり)

- ① は次のように変形することもできる.

$$(-198x + x) + (297y + y) = 3$$

$$x + y = 99(2x - 3y) + 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$0 \leq x \leq 99, \quad 0 \leq y \leq 99 \text{ より}$$

$$0 \leq x + y \leq 198 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

である. ⑦, ⑧ を満たす  $x, y$  は

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \therefore x = \frac{9}{5}, y = \frac{6}{5}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + y = 102 \end{cases} \quad \therefore x = \frac{307}{5}, y = \frac{203}{5}$$

であるが, これは  $x, y$  が整数であることに反する.

よって,  $\overline{N} = \frac{2}{3}N + 1$  を満たす  $N$  は存在しない.