

0 以上 9999 以下の整数を 4 桁で表示し、以下の操作を行うこととする。ただし、4 桁で表示するとは、整数が 100 以上 999 以下の場合は千の位の数字を 0, 10 以上 100 以下の場合は千の位と百の位の数字を 0, 1 以上 9 以下の場合は千の位と百の位と十の位の数字を 0, そして 0 はどの位の数字も 0 とすることである。

操作：千の位の数字と十の位の数字を入れ替える。さらに、百の位の数字と一の位の数字を入れ替える。

また、整数 L に対し、操作によって得られた整数を \bar{L} と表す。

- (1) M を 0 以上 9999 以下の整数とし、 $M = 100x + y$ のように整数 x, y ($0 \leq x \leq 99, 0 \leq y \leq 99$) を用いて表す。操作によって得られた \bar{M} が M の $\frac{2}{3}$ 倍に 3 を足した数に等しいならば、 $-197x + 298y = 9$ が成り立つことを証明せよ。
- (2) N が 0 以上 9999 以下の整数ならば、操作によって得られた整数 \bar{N} は N の $\frac{2}{3}$ 倍に 1 を足した数と等しくならないことを証明せよ。

(22 千葉大 4)

【答】

- (1) 略
- (2) 略

【解答】

操作は「4 桁の数の上 2 桁と下 2 桁を入れ替える」ということである。

- (1) 0 以上 9999 以下の整数 $M = 100x + y$ ($0 \leq x \leq 99, 0 \leq y \leq 99$) のとき

$$\bar{M} = 100y + x$$

であるから

$$\bar{M} = \frac{2}{3}M + 3$$

ならば

$$100y + x = \frac{2}{3}(100x + y) + 3$$

$$300y + 3x = 2(100x + y) + 9$$

$$\therefore -197x + 298y = 9$$

が成り立つ。

……(証明終わり)

- (2) 0 以上 9999 以下の整数 N を $N = 100x + y$ ($0 \leq x \leq 99, 0 \leq y \leq 99$) と表すと

$$\bar{N} = 100y + x$$

である。 $\bar{N} = \frac{2}{3}N + 1$ とならないことを背理法で示す。

$\bar{N} = \frac{2}{3}N + 1$ が成り立つと仮定すると

$$100y + x = \frac{2}{3}(100x + y) + 1$$

$$300y + 3x = 2(100x + y) + 3$$

$$\therefore -197x + 298y = 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

互除法を実行すると右のようになります、298と197は互いに素である

$$298 = 197 \cdot 1 + 101$$

$$197 = 101 \cdot 1 + 96$$

$$101 = 96 \cdot 1 + 5$$

$$96 = 5 \cdot 19 + 1$$

1	298	197	1
1	197	101	
1	101	96	19
	96	95	
5	5	1	
		5	
		0	

であり

$$\begin{aligned} 1 &= 96 - 5 \cdot 19 \\ &= 96 - (101 - 96 \cdot 1) \cdot 19 = 96 \cdot 20 - 101 \cdot 19 \\ &= (197 - 101 \cdot 1) \cdot 20 - 101 \cdot 19 = 197 \cdot 20 - 101 \cdot 39 \\ &= 197 \cdot 20 - (298 - 197 \cdot 1) \cdot 39 = 197 \cdot 59 - 298 \cdot 39 \\ \therefore 197 \cdot 59 - 298 \cdot 39 &= 1 \\ \therefore 197 \cdot 177 - 298 \cdot 117 &= 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{②} \end{aligned}$$

①, ② の辺々を引くと

$$\begin{aligned} -197(x+177) + 298(y+117) &= 0 \\ 197(x+177) &= 298(y+117) \end{aligned}$$

298と197は互いに素であるから

$$x+177 = 298k$$

となる整数 k が存在する (このとき $y+117 = 197k$ である).

$$x = 298k - 177$$

であるが

$$\begin{aligned} k \leqq 0 \text{ のとき } x &\leqq -177 \\ 1 \leqq k \text{ のとき } x &\geqq 121 \end{aligned}$$

であり、 $0 \leqq x \leqq 99$ となる x は存在しない。

よって、 $\overline{N} = \frac{2}{3}N + 1$ を満たす N は存在しない。……(証明終わり)

- ①は次のように変形することもできる。

$$\begin{aligned} (-198x + x) + (297y + y) &= 3 \\ x + y &= 99(2x - 3y) + 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{⑦} \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq 99$, $0 \leqq y \leqq 99$ より

$$0 \leqq x + y \leqq 198 \quad \cdots \cdots \textcircled{①}$$

である。⑦, ①を満たす x, y は

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \therefore x = \frac{9}{5}, y = \frac{6}{5}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + y = 102 \end{cases} \quad \therefore x = \frac{307}{5}, y = \frac{203}{5}$$

であるが、これは x, y が整数であることに反する。

よって、 $\overline{N} = \frac{2}{3}N + 1$ を満たす N は存在しない。