$m,\ n,\ k$ を整数とし，x についての 3 次方程式

$$(*)\qquad (2x-k)(x^2+mx+2n)=6$$

の整数解について考える．

(1) $k=21,\ m=-18,\ n=37$ のとき，方程式 $(*)$ の整数解をすべて求めよ．

(2) $k-1$ が 4 の倍数であるとする．方程式 $(*)$ が相異なる偶数の解をちょうど 2 つもつとき，k を用いて $m,\ n$ を表せ．

(22 東北大 後 理 2)

【答】

(1) $x=10,\ 12$

(2) $m=3-k$，$n=\dfrac{k^2}{8}-\dfrac{3}{4}k-\dfrac{19}{8}$

【解答】

$$(*)\qquad (2x-k)(x^2+mx+2n)=6$$

(1) $k=21,\ m=-18,\ n=37$ のとき，方程式 $(*)$ は

$$(2x-21)(x^2-18x+74)=6$$

となる．これを満たす整数 x は $2x-21$ が奇数であることに着目すると

$2x-21$	-3	-1	1	3
$x^2-18x+74$	-2	-6	6	2

$\cdots\cdots$ ①

の 4 通りの候補がある．下段の ① については，$x^2-18x+74=(x-9)^2-7$ と変形した式に代入しながら成立を確認していくと

(i) $2x-21=-3$ のとき，$x=9$ であり，　$(9-9)^2-7=-7$　① に反する．

(ii) $2x-21=-1$ のとき，$x=10$ であり，　$(10-9)^2-7=-6$　① を満たす．

(iii) $2x-21=1$ のとき，$x=11$ であり，　$(11-9)^2-7=-3$　① に反する．

(iv) $2x-21=3$ のとき，$x=12$ であり，　$(12-9)^2-7=2$　① を満たす．

よって，整数解のすべては

$$\boldsymbol{x=10,\ 12}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $k-1=4l$ (l は整数) であるとき，$x=2X$ とおくと

$$\begin{aligned}(*) &\iff (4X-4l-1)(4X^2+2mX+2n)=6\\ &\iff (4X-4l-1)(2X^2+mX+n)=3 \qquad\cdots\cdots (*)'\end{aligned}$$

であり，方程式 $(*)$ が相異なる偶数の解 x をちょうど 2 つもつということは，方程式 $(*)'$ が相異なる整数の解 X をちょうど 2 つもつということである．

$4X-4l-1=4(X-l-1)+3$ より，$4X-4l-1$ は 4 で割った余りが 3 であることに着目すると

$4X-4l-1$	-1	3
$2X^2+mX+n$	-3	1

$\cdots\cdots$ ②

の 2 通りの候補がある．

(i) $4X-4l-1=-1$ のとき，$X=l$ であり，下段の ② は

$$2l^2+ml+n=-3$$
$$\therefore\quad 2l^2+ml+n+3=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

(ii) $4X-4l-1=3$ のとき，$X=l+1$ であり，下段の ② は

$$2(l+1)^2+m(l+1)+n=1$$
$$\therefore\quad 2l^2+(m+4)l+m+n+1=0 \qquad \cdots\cdots ④$$

$(*)'$ を満たす整数 X がちょうど 2 つ存在する条件は，「③かつ④」を満たす整数 l が存在することである．

④ − ③ より

$$4l+m-2=0 \qquad \therefore\quad m=2-4l \qquad \cdots\cdots ⑤$$

⑤ を ③ に代入すると

$$2l^2+(2-4l)l+n+3=0$$
$$\therefore\quad n=2l^2-2l-3 \qquad \cdots\cdots ⑥$$

$k-1=4l$ より，$m,\ n$ を k で表すと

$$m=2-(k-1)=\boldsymbol{3-k} \qquad \cdots\cdots(答)$$
$$n=2\left(\frac{k-1}{4}\right)^2-2\cdot\frac{k-1}{4}-3$$
$$=\frac{k^2-2k+1}{8}-\frac{k-1}{2}-3$$
$$=\boldsymbol{\frac{k^2}{8}-\frac{3}{4}k-\frac{19}{8}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 「③かつ④」$\Longleftrightarrow$「③かつ⑤」$\Longleftrightarrow$「⑤かつ⑥」であり，l に対し「⑤かつ⑥」を満たす方程式 $(*)'$ は 2 つの整数解 $X=l,\ l+1$ をもつ．

  具体例として，$k-1=20$ とすると，$4l=20$ すなわち $l=5$ であり，このとき ⑤, ⑥ より $m=-18$，$n=37$ となり，(1) の 3 次方程式を得る．この方程式を展開し解いてみると

  $$(2x-21)(x^2-18x+74)=6$$
  $$2x^3-57x^2+526x-1560=0$$
  $$\therefore\quad (x-10)(x-12)(2x-13)=0$$

  となり，相異なる 2 つの偶数解 10, 12 をもつことが分かる．(1) は (2) の例となっている．

  同じく，$(*)$ については，$k-1=4l$ (l は整数) であるとき，$m,\ n$ が ⑤, ⑥ を満たすならば，$(*)$ は

  $$(2x-4l-1)\{x^2+(2-4l)x+2(2l^2-2l-3)\}=6$$
  $$2x^3-(12l-3)x^2+(24l^2-12l-14)x-16l^3+12l^2+28l+6=6$$
  $$\therefore\quad (x-2l)(x-2l-2)(2x-4l+7)=0$$

  となり，相異なるちょうど 2 つの偶数解 $2l,\ 2l+2$ をもつ．