α を正の実数，β を複素数とする複素数平面上の 3 点 0, α, β を頂点とする三角形の面積が 1 で，α と β が $5\alpha^2 - 4\alpha\beta + \beta^2 = 0$ を満たすとき，α と β の値を求めよ．

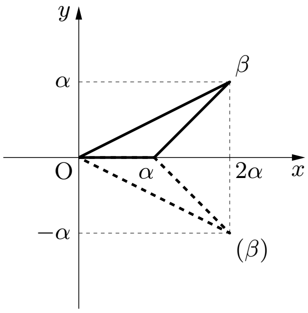
(22 三重大 工・医 1(4))

【答】 $\alpha = \sqrt{2}$，$\beta = 2\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$

【解答】

α は正の実数，$\beta^2 - 4\alpha\beta + 5\alpha^2 = 0$ より

$$\begin{aligned}\beta &= 2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 5\alpha^2} \\ &= 2\alpha \pm \alpha i\end{aligned}$$



である．0, α, β を頂点とする三角形は右図となり，2 通りある β の値がどちらであっても $\triangle 0\alpha\beta$ の面積は $\frac{1}{2}\alpha^2$ である．面積は 1 だから

$$\frac{1}{2}\alpha^2 = 1$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\alpha = \sqrt{2}} \quad (\because\ \alpha > 0) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．また

$$\boldsymbol{\beta = 2\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．