複素数からなる数列 $\{z_n\}$ を，次の条件で定める．

$$z_1 = 0,\ z_{n+1} = (1+i)z_n - i \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

正の整数 n に対し，z_n に対応する複素数平面上の点を A_n とおく．

(1) $z_2 = \boxed{ツ} + \boxed{テ}i,\ z_3 = \boxed{ト} + \boxed{ナ}i,\ z_4 = \boxed{ニ} + \boxed{ヌ}i$ である．
(2) $r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi$ を用いて，$1+i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ のように $1+i$ を極形式で表わすとき，

$$r = \sqrt{\boxed{ネ}},\ \theta = \frac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハ}}\pi$$

である．
(3) すべての正の整数 n に対する $\triangle \mathrm{PA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ が互いに相似になる点 P に対応する複素数は，$\boxed{ヒ} + \boxed{フ}i$ である．
(4) $|z_n| > 1000$ となる最小の n は $n = \boxed{ヘ}$ である．
(5) A_{2022+k} が実軸上にある最小の正の整数 k は $k = \boxed{ホ}$ である．

(22 上智大 理工 3)

【答】

ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ
0	-1	1	-2	3	-2	2	1	4	1	0	21	3

【解答】

$$z_1 = 0,\ z_{n+1} = (1+i)z_n - i \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) 順次計算すると

$$z_2 = (1+i)\cdot 0 - i = -i = \mathbf{0 + (-1)}\boldsymbol{i} \qquad \cdots\cdots(答)$$
$$z_3 = (1+i)\cdot(-i) - i = 1 - 2i = \mathbf{1 + (-2)}\boldsymbol{i} \qquad \cdots\cdots(答)$$
$$z_4 = (1+i)\cdot(1-2i) - i = (3-i) - i = \mathbf{3 + (-2)}\boldsymbol{i} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ であるから

$$\boldsymbol{r = \sqrt{2}}, \quad \boldsymbol{\theta = \frac{1}{4}\pi} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) ① は次のように変形される．

$$z_{n+1} - 1 = (1+i)(z_n - 1)$$

B(1) とおき (2) も考慮すると，$\overrightarrow{\mathrm{BA}_{n+1}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{BA}_n}$ を $\frac{\pi}{4}$ 回転して $\sqrt{2}$ 倍したベクトルである．

よって，すべての正の整数 n に対して $\triangle \mathrm{PA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ が互いに相似になる点 P は B であり，P に対応する複素数は

$$1 = \mathbf{1 + 0}\boldsymbol{i} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) (3) より

$$\mathrm{PA}_1 = 1, \quad \mathrm{PA}_{n+1} = \sqrt{2}\mathrm{PA}_n$$

であるから

$$\mathrm{PA}_n = \sqrt{2}^{\,n-1}$$

$$|z_n| = \mathrm{OA}_n \leqq \mathrm{OP} + \mathrm{PA}_n = 1 + \sqrt{2}^{\,n-1}$$

である．

$n \leqq 20$ のとき

$$1 + \sqrt{2}^{\,n-1} \leqq 1 + \sqrt{2}^{\,19} = 1 + 512\sqrt{2} < 1 + 512 \times 1.5 = 769$$

$n = 21$ のとき

$$|z_{21}| = \mathrm{OA}_{21} \geqq \mathrm{PA}_{21} - \mathrm{OP} = \sqrt{2}^{\,20} - 1 = 1024 - 1 = 1023$$

したがって，$|z_n| > 1000$ となる

最小の n は　**21**　……(答)

である．

(5) $\mathrm{A}_1(0)$ で，A_{n+1} は A_n を点 P のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した点であるから，A_n が実軸上にある条件は

$$n = (4\text{ の倍数}) + 1$$

である．

よって，$\mathrm{A}_{2022+k} = \mathrm{A}_{4\cdot 505+2+k}$ が実軸上にある最小の正の整数 k は

$\boldsymbol{k = 3}$　……(答)

である