t を実数とし，x の 3 次式 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 + (1-2t)x^2 + (4-2t)x + 4$$

により定める．以下の問いに答えよ．

(1) 3 次式 $f(x)$ を実数係数の 2 次式と 1 次式の積に因数分解し，$f(x) = 0$ が虚数の解をもつような t の範囲を求めよ．

実数 t が (1) で求めた範囲にあるとき，方程式 $f(x) = 0$ の異なる 2 つの虚数解を α, β とし，実数解を γ とする．ただし，α の虚部は正，β の虚部は負とする．以下，α, β, γ を複素数平面上の点とみなす．

(2) α, β, γ を t を用いて表せ．また，実数 t が (1) で求めた範囲を動くとき，点 α が描く図形を複素数平面上に図示せよ．
(3) 3 点 α, β, γ が一直線上にあるような t の値を求めよ．
(4) 3 点 α, β, γ が正三角形の頂点となるような t の値を求めよ．

(22 中央大 理工 4)

【答】
(1) $f(x) = (x+1)(x^2-2tx+4)$，$-2 < t < 2$
(2) $\alpha = t + \sqrt{4-t^2}\,i$, $\beta = t - \sqrt{4-t^2}\,i$, $\gamma = -1$，図は略.
(3) $t = -1$
(4) $t = \dfrac{-1 \pm 3\sqrt{5}}{4}$

【解答】

$$f(x) = x^3 + (1-2t)x^2 + (4-2t)x + 4$$

(1) $f(-1) = 0$ であることに着目し，$f(x)$ を因数分解すると

$$\boldsymbol{f(x) = (x+1)(x^2-2tx+4)} \quad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 次数の低い t について式を整理すると

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + x^2 + 4x + 4 - 2t(x^2+x) \\ &= (x+1)(x^2+4) - 2tx(x+1) \\ &= (x+1)(x^2-2tx+4) \end{aligned}$$

である．

$f(x) = 0$ が虚数の解をもつ条件は，$x^2 - 2tx + 4 = 0$ が虚数の解をもつことであるから，求める t の範囲は (判別式) < 0 より

$$t^2 - 4 < 0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{-2 < t < 2} \quad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $-2<t<2$ のとき，$f(x)=0$ の解は

$$x=-1,\ t\pm\sqrt{4-t^2}\,i$$

である．虚数解 α, β について，α の虚部は正，β の虚部は負であるから

$$\boldsymbol{\alpha=t+\sqrt{4-t^2}\,i,\quad \beta=t-\sqrt{4-t^2}\,i,\quad \gamma=-1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．$\alpha=-a+bi$ (a, b は実数) とおくと

$$\begin{cases}a=t\\ b=\sqrt{4-t^2}\end{cases}$$

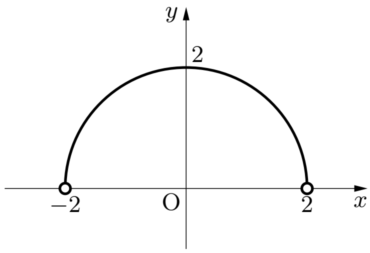
$$\iff \begin{cases}t=a\\ b=\sqrt{4-a^2}\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}t=a\\ b^2=4-a^2\\ b\geqq 0\end{cases}$$

である．$-2<t<2$ もあわせると

$$\begin{cases}-2<a<2\\ a^2+b^2=4\end{cases}$$

である．したがって，点 α は複素数平面上で，原点を中心とした半径 2 の円周の虚部が正の半円を描く．



- 解と係数の関係より $\alpha\beta=4$ であり，$\beta=\overline{\alpha}$ であるから

  $$|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}=\alpha\beta=4|\alpha|=2$$

  また，α の虚部は正であることから，点 α が描く図形は，原点を中心とした半径 2 の円周の虚部が正の半円にあることがわかる．

(3) 3 点 α, β, γ が一直線上にある条件は $\gamma\ (=-1)$ が 2 点 α, β を通る直線上にあることである．2 点 α, β を通る直線は虚軸に平行な直線であり，その実部は t である．したがって，t の値は

$$\boldsymbol{t=-1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

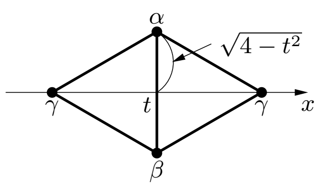
である．

(4) 2 点 α, β は実軸に関して対称な位置にあり，実部が t，虚部の絶対値が $\sqrt{4-t^2}$ である．

このことに注目すると，3 点 α, β, γ が正三角形の頂点となるのは $\gamma\ (=-1)$ が

$$t\pm\sqrt{3}\sqrt{4-t^2}$$

となるときである．



$$t\pm\sqrt{3}\sqrt{4-t^2}=-1$$
$$(t+1)^2=3(4-t^2)$$
$$4t^2+2t-11=0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{t=\frac{-1\pm3\sqrt{5}}{4}}\quad (-2<t<2\ をみたす) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．