複素数 $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{3}$ を満たすとき $z^{10}+\dfrac{1}{z^{10}}$ の値は $\boxed{\phantom{00}}$ である．

(22 京都産大 理・情報理工 1(3))

---

【答】 $\boxed{1}$

---

【解答】

$$z+\frac{1}{z}=\sqrt{3} \iff z^2-\sqrt{3}z+1=0$$

$$\therefore \quad z=\frac{\sqrt{3}\pm i}{2}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) \quad (\text{以下，複号同順})$$

である．これより，ド・モアブルの定理を用いると

$$\begin{aligned}
&z^{10}+\frac{1}{z^{10}}=z^{10}+z^{-10}\\
&=\left\{\cos\left(\pm\frac{10\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pm\frac{10\pi}{6}\right)\right\}+\left\{\cos\left(\pm\frac{(-10)\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pm\frac{(-10)\pi}{6}\right)\right\}\\
&=\left(\cos\frac{5\pi}{3}\pm i\sin\frac{5\pi}{3}\right)+\left(\cos\frac{5\pi}{3}\mp i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\\
&=2\cos\frac{5\pi}{3}\\
&=\mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

- $z^{10}+\dfrac{1}{z^{10}}$ が現れるように，$(*)$ を用いて $z^n+\dfrac{1}{z^n}$ $(n=2,\ 3,\ 5,\ 10)$ を順次つくっていく．

$$z^2+\frac{1}{z^2}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2\cdot z\cdot\frac{1}{z}=3-2=1 \qquad \cdots\cdots ㋐$$

$$z^3+\frac{1}{z^3}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^3-3\cdot z\cdot\frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)=3\sqrt{3}-3\sqrt{3}=0 \qquad \cdots\cdots ㋑$$

㋐, ㋑ の辺々を掛けると

$$z^5+\frac{1}{z}+z+\frac{1}{z^5}=1\cdot 0 \qquad \therefore \quad z^5+\frac{1}{z^5}+\sqrt{3}=0 \quad (\because\ (*))$$

$$\therefore \quad z^5+\frac{1}{z^5}=-\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots ㋒$$

㋒ の辺々を 2 乗すると

$$z^{10}+2\cdot z^5\cdot\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^{10}}=3 \qquad \therefore \quad z^{10}+\frac{1}{z^{10}}=1$$

である．