複素数 z について 1，z，z^2 を表す複素数平面上の点をそれぞれ A，B，C とする．次の問に答えよ

(1) 点 A，B，C が正三角形の 3 つの頂点となる z をすべて求めよ．

(2) 点 A，B，C が直角三角形の 3 つの頂点となるための z に関する条件を求めよ．また，この条件を満たす点 z 全体を図示せよ．

(22 佐賀大 理工 4)

【答】

(1) $z=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

(2) (z の実部) $=0$，-1 または $\left|z+\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$ ただし，$z\neq 0$，1，図は略．

【解答】

(1) 3 点 A，B，C は三角形をつくるから，3 点 A，B，C は互いに異なり

$$\begin{cases} z\neq 1 \\ z^2\neq z \\ z^2\neq 1 \end{cases} \qquad \therefore\quad z\neq \pm 1,\ 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

である．

① のとき，点 A，B，C が正三角形の 3 つの頂点となる条件は

点 B(z) を，点 A(1) を中心に $\pm\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点が C(z^2) と一致する　　$\cdots\cdots(*)$

ことである．

$$(*) \iff z^2-1=(z-1)\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}\ \text{(複号同順)}$$

$$\therefore\quad (z-1)(z+1)=(z-1)\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$z\neq 1$ であるから

$$z+1=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i} \qquad \cdots\cdots\text{(答)}$$

である．

(2) 点 A，B，C が直角三角形の 3 つの頂点となる条件は

$$\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}\ \text{または}\ \angle\mathrm{BCA}=\frac{\pi}{2}\ \text{または}\ \angle\mathrm{CAB}=\frac{\pi}{2} \qquad \cdots\cdots(**)$$

が成り立つことである．

$$(**) \iff \frac{z^2-z}{1-z},\ \frac{1-z^2}{z-z^2},\ \frac{z-1}{z^2-1}\text{のいずれかが純虚数である}$$

$$\iff -z,\ \frac{1+z}{z},\ \frac{1}{z+1}\text{のいずれかが純虚数である}$$

$$\iff -z+\overline{(-z)}=0\ \text{または}\ \frac{1+z}{z}+\overline{\left(\frac{1+z}{z}\right)}=0$$

$$\text{または}\ \frac{1}{z+1}+\overline{\left(\frac{1}{z+1}\right)}=0$$

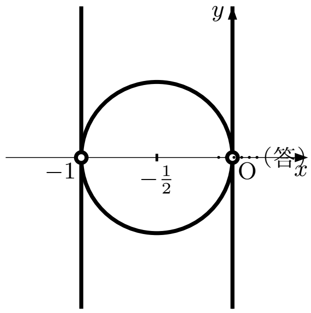
① のもとで変形すると

$$
\begin{aligned}
(**) \iff& z+\overline{z}=0 \text{ または } \overline{z}(1+z)+z\overline{(1+z)}=0 \\
&\quad \text{または } \overline{(1+z)}+(z+1)=0 \\
\iff& z+\overline{z}=0 \text{ または } |z|^2+\frac{z+\overline{z}}{2}=0 \text{ または } z+\overline{z}=-2 \\
\iff& \frac{z+\overline{z}}{2}=0 \text{ または } \left|z+\frac{1}{2}\right|^2=\frac{1}{4} \text{ または } \frac{z+\overline{z}}{2}=-1 \\
\iff& (z\text{ の実部})=0 \text{ または } \left|z+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2} \text{ または } (z\text{ の実部})=-1
\end{aligned}
$$

よって，z のみたすべき条件は

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{(z\text{ の実部})=0,\ -1} \\
&\text{または } \boldsymbol{\left|z+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2},} \\
&\text{ただし, } \boldsymbol{z \fallingdotseq 0,\ 1}
\end{aligned}
$$

である．z を図示すると右図となる．



- 条件 $(**)$ を次のようにとらえることもできる．

$$
\begin{aligned}
(**) \iff& \mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2=\mathrm{AC}^2 \\
&\quad \text{または } \mathrm{BC}^2+\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2 \\
&\quad \text{または } \mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\mathrm{BC}^2 \\
\iff& |z-1|^2+|z^2-z|^2=|z^2-1|^2 \\
&\quad \text{または } |z^2-z|^2+|z^2-1|^2=|z-1|^2 \\
&\quad \text{または } |z-1|^2+|z^2-1|^2=|z^2-z|^2 \\
\iff& 1+|z|^2=|z+1|^2 \text{ または } |z|^2+|z+1|^2=1 \\
&\quad \text{または } 1+|z+1|^2=|z|^2 \quad (\because\ ①) \\
\iff& z+\overline{z}=0 \text{ または } |z|^2+\frac{z+\overline{z}}{2}=0 \text{ または } z+\overline{z}=-2
\end{aligned}
$$

以下，解答と同じ．