複素数 w に対し，その虚部を $\mathrm{Im}(w)$ とかく．0 でない複素数 z が

$$\mathrm{Im}(z+z^{-1})=0$$

をみたしながら動くとき．以下の問いに答えよ．

(1) 複素数平面において，点 z はどのような図形を描くか．

(2) $\left||z|^2-3z+2i\right|$ のとりうる値の最小値を求めよ．

(22 信州大 後 理 3)

【答】

(1) 原点を中心とする半径 1 の円と実軸 (原点を除く) の和集合

(2) $3-\sqrt{5}$

【解答】

(1) $z\ (z \neq 0)$ を極形式を用いて

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \quad (r>0)$$

として表す．

$$\begin{aligned} z+z^{-1} &= r(\cos\theta+i\sin\theta)+r^{-1}(\cos\theta-i\sin\theta) \\ &= (r+r^{-1})\cos\theta+i(r-r^{-1})\sin\theta \end{aligned}$$

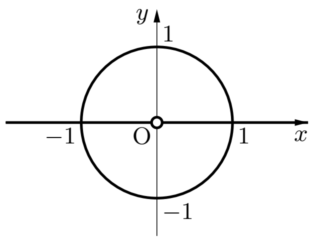
であるから

$$\begin{aligned} &\mathrm{Im}(z+z^{-1})=0 \\ \iff &\frac{r^2-1}{r}\sin\theta=0 \\ \iff &r=1 \text{ または } \sin\theta=0 \quad (\because\ r>0) \\ \iff &|z|=1 \text{ または } \mathrm{Im}(z)=0 \end{aligned}$$

である．これを満たす点 $z\ (z \neq 0)$ の集合は

原点を中心とする半径 1 の円と
実軸 (原点を除く) の和集合 ……(答)

である．図示すると，右図となる．



- $z=x+yi$ (x, y は実数) とおき，

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(z+z^{-1}) &= \mathrm{Im}\left(x+yi+\frac{1}{x+yi}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(x+yi+\frac{x-yi}{x^2+y^2}\right) \\ &= \frac{y(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

としてもよいし

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(z+z^{-1}) &= \frac{1}{2i}\{(z+z^{-1})-\overline{(z+z^{-1})}\} \\ &= \frac{1}{2i}\left(z+\frac{1}{z}-\overline{z}-\frac{1}{\overline{z}}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(z-\overline{z}-\frac{z-\overline{z}}{z\overline{z}}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\,\frac{(z-\overline{z})(|z|^2-1)}{|z|^2} \end{aligned}$$

としてもよい．

(2) (1) より，z は 2 つに場合分けされる．
$f(z)=||z|^2-3z+2i|^2$ とおくと

(i) z が原点を除く実軸上を動くとき
$z=x\ (\fallingdotseq 0)$ と表すことができるから

$$\begin{aligned} f(z)&=|x^2-3x+2i|^2 \\ &=x^2(x-3)^2+4 \end{aligned}$$

であり，$f(z)$ は $z(=x)=3$ で最小値 4 をとる．

(ii) z が円 $|z|=1$ 上を動くとき
$z=\cos\theta+i\sin\theta$ と表すことができるから

$$\begin{aligned} f(z)&=|1^2-3(\cos\theta+i\sin\theta)+2i|^2 \\ &=(1-3\cos\theta)^2+(2-3\sin\theta)^2 \\ &=14-6(\cos\theta+2\sin\theta) \\ &=14-6\sqrt{5}\cos(\theta-\alpha) \quad \left(\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \end{aligned}$$

であり，$f(z)$ は $\theta=\alpha$ で最小値 $14-6\sqrt{5}$ をとる．

(i)，(ii) における最小値を比較すると

$$(14-6\sqrt{5})-4=10-6\sqrt{5}=\sqrt{100}-\sqrt{180}<0$$

であり，$14-6\sqrt{5}<4$ であるから，求める最小値は

$$\sqrt{14-6\sqrt{5}}=\sqrt{14-2\sqrt{45}}=\mathbf{3-\sqrt{5}} \qquad \cdots\cdots（答）$$

である．