$Z_n = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{4}i\right)^{n-1}$ (n は正の整数) において $|Z_n| < \dfrac{1}{50000}$ を満たす最小の n における Z_n の偏角 θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で求めなさい．なお，$i = \sqrt{-1}$ である．

(22 公立千歳科技大 中期 理工 1(6))

【答】 $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$

【解答】

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

であるから

$$Z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left\{\cos\frac{(n-1)\pi}{6} + i\sin\frac{(n-1)\pi}{6}\right\} \quad (\because \text{ ド・モアブルの定理})$$

である．$|Z_n| < \dfrac{1}{50000}$ $\cdots\cdots$ $(*)$ を満たす正の整数 n の値の範囲は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{50000} \qquad \therefore \quad 2^{n-1} > 50000$$

ここで

$$2^{10} = 1024, \quad 2^5 = 32, \quad 2^6 = 64$$
$$\therefore \quad 2^{15} = 32768, \quad 2^{16} = 65536$$
$$2^{15} < 50000 < 2^{16}$$

であるから，$(*)$ を満たす最小の n は

$$n - 1 = 16 \qquad \therefore \quad n = 17$$

である．

Z_{17} の偏角は

$$\frac{(17-1)\pi}{6} = \frac{16\pi}{6} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$$

であるから，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲での Z_n の偏角 θ は

$$\boldsymbol{\theta = \frac{2\pi}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．