z を実数ではない複素数とする．複素数平面上の 3 点 $\mathrm{P}(1)$，$\mathrm{Q}(z)$，$\mathrm{R}(-z^2+2)$ について，次の問いに答えよ．

(1) 3 点 P，Q，R が正三角形の頂点となるような複素数 z をすべて求めよ．

(2) 3 点 P，Q，R が直角二等辺三角形の頂点となるような複素数 z をすべて求めよ．

(22 兵庫県大 工 4)

【答】

(1) $z=-\dfrac{3}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

(2) $z=-1\pm i,\ -2\pm i,\ -\dfrac{3\pm i}{2}$

【解答】

3 点 $\mathrm{P}(1)$，$\mathrm{Q}(z)$，$\mathrm{R}(-z^2+2)$ は相異なるから

$$\begin{cases} z \fallingdotseq 1 \\ -z^2+2 \fallingdotseq 1 \\ -z^2+2 \fallingdotseq z \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} z \fallingdotseq 1 \\ (z+1)(z-1) \fallingdotseq 0 \\ (z+2)(z-1) \fallingdotseq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad z \fallingdotseq \pm 1,\ -2$$

z は実数でない複素数であるから，これらは成立する．

(1) 3 点 $\mathrm{P}(1)$，$\mathrm{Q}(z)$，$\mathrm{R}(-z^2+2)$ が正三角形の頂点となる条件は

$$(-z^2+2)-1=(z-1)\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\} \quad (以下，複号同順)$$

を満たすことである．

$$-z^2+1=(z-1)\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

$$-(z+1)=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2} \quad (\because\ z \fallingdotseq 1)$$

$$\boldsymbol{z=-\frac{3}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) どの角が直角となるかで場合分けする．

(i) $\angle\mathrm{P}=90^\circ$ の直角二等辺三角形のとき

$$(-z^2+2)-1=(z-1)\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right\} \quad (以下，複号同順)$$

を満たすことである．

$$-z^2+1=(z-1)(\pm i)$$

$$-(z+1)=\pm i \quad (\because\ z \fallingdotseq 1)$$

$$\therefore \quad z=-1\mp i$$

である．

(ii) $\angle\mathrm{Q}=90^\circ$ の直角二等辺三角形のとき

$$(-z^2+2)-z=(1-z)\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right\} \quad (以下，複号同順)$$

を満たすことである．

$$
\begin{aligned}
-z^2-z+2&=-(z-1)(\pm i)\\
z+2&=\pm i \quad (\because\ z\fallingdotseq 1)\\
\therefore\quad z&=-2\pm i
\end{aligned}
$$

である．

(iii) $\angle \mathrm{R}=90^\circ$ の直角二等辺三角形のとき

$$
z-(-z^2+2)=\{1-(-z^2+2)\}\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right\}
$$

(以下，複号同順)

を満たすことである．

$$
\begin{aligned}
z^2+z-2&=(z^2-1)(\pm i)\\
z+2&=(z+1)(\pm i) \quad (\because\ z\fallingdotseq 1)\\
(1\mp i)z&=-2\pm i\\
\therefore\quad z&=-\frac{2\mp i}{1\mp i}=-\frac{(2\mp i)(1\pm i)}{1+1}=-\frac{3\pm i}{2}
\end{aligned}
$$

である．

以上 (i)，(ii)，(iii) より，求める複素数 z は

$$
\boldsymbol{z=-1\pm i,\ -2\pm i,\ -\frac{3\pm i}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)
$$

である．