i を虚数単位とし，$\alpha=-2+2i$, $\beta=3+i$ とする．このとき，α^5 の値は $\boxed{\text{(ア)}}$ である．

z は等式 $2|z-\alpha|=|z-\beta|$ を満たす複素数全体を動くとする．このとき，複素数平面上の点 $\mathrm{P}(z)$ が描く図形は円であり，その中心を表す複素数は $\boxed{\text{(イ)}}$ である．また，$|z|$ の最大値は $\boxed{\text{(ウ)}}$ である．

(22 北里大 医 1(1))

【答】

(ア)	(イ)	(ウ)
$128-128i$	$-\dfrac{11}{3}+\dfrac{7}{3}i$	$\dfrac{\sqrt{170}+2\sqrt{26}}{3}$

【解答】

α を極形式で表すと

$$\begin{aligned}\alpha&=-2+2i=2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\\&=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)\end{aligned}$$

であるから，ド・モアブルの定理を用いると

$$\begin{aligned}\alpha^5&=(2\sqrt{2})^5\left(\cos\frac{15}{4}\pi+i\sin\frac{15}{4}\pi\right)\\&=128\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\\&=\boldsymbol{128-128i}\end{aligned}$$

……(答)

である．

次に，$\alpha=-2+2i$, $\beta=3+i$ に対し点 $\mathrm{P}(z)$ は

$$2|z-\alpha|=|z-\beta|$$

を満たすから

$$\begin{aligned}&4|z-\alpha|^2=|z-\beta|^2\\&4(z-\alpha)(\overline{z-\alpha})=(z-\beta)(\overline{z-\beta})\\&4(z\overline{z}-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha})=z\overline{z}-\overline{\beta}z-\beta\overline{z}+\beta\overline{\beta}\\&3z\overline{z}-(4\overline{\alpha}-\overline{\beta})z-(4\alpha-\beta)\overline{z}=\beta\overline{\beta}-4\alpha\overline{\alpha}\\&\left|z-\frac{4\alpha-\beta}{3}\right|^2=\frac{\beta\overline{\beta}-4\alpha\overline{\alpha}}{3}+\left|\frac{4\alpha-\beta}{3}\right|^2\\&\left|z-\frac{4\alpha-\beta}{3}\right|^2=\frac{4\alpha\overline{\alpha}-4\overline{\alpha}\beta-4\alpha\overline{\beta}+4\beta\overline{\beta}}{9}\\&\therefore\ \left|z-\frac{4\alpha-\beta}{3}\right|=\frac{2}{3}|\alpha-\beta|\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(z)$ は中心 $\dfrac{4\alpha-\beta}{3}$，半径 $\dfrac{2}{3}|\alpha-\beta|$ の円を描く．中心を表す複素数は

$$\frac{4\alpha-\beta}{3}=\frac{4(-2+2i)-(3+i)}{3}=\boldsymbol{-\frac{11}{3}+\frac{7}{3}i}$$

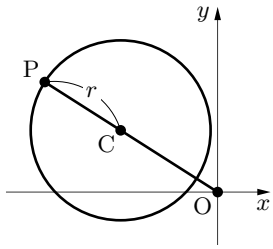
……(答)

である．半径は

$$\frac{2}{3}|\alpha-\beta|=\frac{2}{3}|(-2+2i)-(3+i)|=\frac{2}{3}|-5+i|=\frac{2}{3}\sqrt{26}$$

である．

$|z|$ が最大となるのは，中心を C とおくと，O，C，P がこの順に一直線上に並ぶときである．このときの $|z|$ の最大値は



$$\begin{aligned} \mathrm{OC} + r &= \frac{\sqrt{11^2+7^2}}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{26} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{170}+2\sqrt{26}}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

- $\alpha = -2+2i,\ \beta = 3+i$ が表す点をそれぞれ A，B とおくと

  $$2|z-\alpha| = |z-\beta| \iff \mathrm{PA} : \mathrm{PB} = 1 : 2$$

  であるから，点 P が描く図形は，線分 AB を $1:2$ に内分する点 D，$1:2$ に外分する点 E を直径の両端とする円 (アポロニウスの円) である．$\mathrm{D}(\delta)$, $\mathrm{E}(\epsilon)$ とすると

  $$\delta = \frac{2\alpha+\beta}{3}, \quad \epsilon = 2\alpha - \beta$$

  であるから，中心を表す複素数は

  $$\frac{\delta+\epsilon}{2} = \frac{4\alpha-\beta}{3} = -\frac{11}{3} + \frac{7}{3}i$$

  であり，半径は

  $$\frac{1}{2}|\epsilon-\delta| = \frac{1}{2}\left|\frac{4\alpha-4\beta}{3}\right| = \frac{2}{3}|\alpha-\beta| = \frac{2}{3}|-5+i| = \frac{2}{3}\sqrt{26}$$

  である．