α を 0 でない複素数とする．以下，i は虚数単位とする．

(1) $\alpha = a + bi$ (a, b は実数) と表すとき，$z^2 = \alpha$ をみたす複素数 $z = x + yi$ (x, y は実数) について，x^2 と y^2 をそれぞれ a と b を用いて表せ．さらに $\alpha = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ のときの z を求めよ．

(2) $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と極形式で表すとき，$z^2 = \alpha$ をみたす 2 つの複素数を r と θ を用いて表せ．また，α が正の実数でもないとき，$z^2 = \alpha$ をみたす 2 つの複素数と α の 3 点を頂点とする三角形の面積 S を r と θ を用いて表せ．

(22 和歌山県医大 医 2)

【答】

(1) $x^2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$，$y^2 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$，$z = \pm\left(\sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}} - \sqrt{\dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}}\, i\right)$

(2) $S = r\sqrt{r}\sin\dfrac{\theta}{2}$

【解答】

(1) $\alpha = a + bi$ (a, b は実数)，$z = x + yi$ (x, y は実数) であるから

$$z^2 = \alpha \iff x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi$$

$$\iff (*) \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x^2 + (-y^2) = a \\ x^2(-y^2) = -\dfrac{b^2}{4} \end{cases}$$

x^2，$-y^2$ は 2 次方程式 $t^2 - at - \dfrac{b^2}{4} = 0$ の解であるから

$$(x^2,\ -y^2) = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2},\ \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}\right) \quad (\because\ x^2 \geqq 0,\ -y^2 \leqq 0)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{(x^2,\ y^2) = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2},\ \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

さらに，$\alpha = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ のとき，$a = b = -\sqrt{2}$ であるから

$$x^2 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{2 + 2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \qquad \therefore \quad x = \pm\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}$$

である．このとき，$(*)$ より

$$y = \frac{b}{2x} = \frac{-\sqrt{2}}{\pm 2\sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}}} \quad (\text{以下，複号同順})$$

$$= \mp\frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \mp\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}$$

である．よって

$$\boldsymbol{z = \pm\left(\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} - \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}\, i\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と極形式で表すとき，(1) の a，b は

$$a = r\cos\theta,\ b = r\sin\theta$$

である．ここで $r = |\alpha| \geqq 0$ である．$z^2 = \alpha$ をみたす z は $z = x + yi$ (x，y は実数) とすると，(1) より

$$x^2 = \frac{r\cos\theta + \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}}{2} = \frac{r\cos\theta + r}{2} = r\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\quad x = \pm\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}$$

このとき，$(*)$ より

$$y = \frac{b}{2x} = \frac{r\sin\theta}{\pm 2\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}} = \pm\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\quad \text{(以上，複号同順)}$$

よって

$$\boldsymbol{z = \pm\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)}\qquad \cdots\cdots\text{(答)}$$

である．

$z_1 = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$ とおくと，他方の複素数 z_2 は $z_2 = -z_1$ である．α が正の実数でないとき，$\theta \neq 2n\pi$ (n は整数) であり，3 つの複素数 z_1，z_2，α は三角形をつくる．

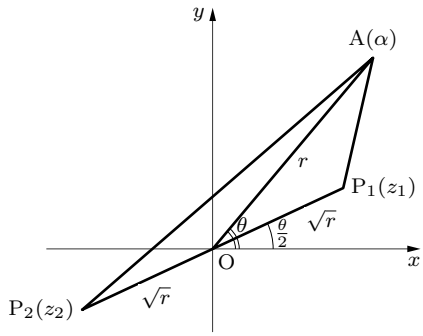
複素数平面で $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{P}_1(z_1)$，$\mathrm{P}_2(z_2)$ とすると

$$\angle\mathrm{AOP}_1 = \frac{\theta}{2},\ \angle\mathrm{AOP}_2 = \pi - \frac{\theta}{2}$$

であるから，$\triangle\mathrm{AP}_1\mathrm{P}_2$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{AOP}_1 + \triangle\mathrm{AOP}_2 \\ &= \frac{1}{2}r\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}r\sqrt{r}\sin\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right) \\ &= \boldsymbol{r\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}} \qquad \cdots\cdots\text{(答)} \end{aligned}$$

である．



- $z = s(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ($s > 0$，$0 \leqq \varphi < 2\pi$) とおくと，ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned} & z^2 = \alpha \\ \iff & s^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ \iff & \begin{cases} s^2 = r \\ 2\varphi = \theta + 2n\pi\ (n \text{ は整数}) \end{cases} \end{aligned}$$

$r > 0$，$0 \leqq \theta < 2\pi$ としてよいから

$$\begin{cases} s = \sqrt{r} \quad (\because\ s > 0) \\ \varphi = \dfrac{\theta}{2},\ \dfrac{\theta}{2} + \pi \quad (\because\ 0 \leqq \varphi < 2\pi) \end{cases}$$

よって

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right),\ \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right) \\ &= \pm\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

以下，解答と同じ．