

$\alpha = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$ のとき、次の問に答えよ。ただし、 $i = \sqrt{-1}$ である。

(i) $\alpha^6 = \boxed{\text{アイ}}$ である。

(ii) $3\alpha^3 - \frac{3}{\alpha^3} = \boxed{\text{ウ}}i$ である。

(22 国士館大 理工 1(1))

【答】	アイ	ウ
	-1	6

【解答】

(i) $\alpha = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$ のとき、ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned}\alpha^6 &= \cos\left(6 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(6 \cdot \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos \pi + i \sin \pi \\ &= -1\end{aligned}\quad \dots\dots(\text{答})$$

である。

(ii) ド・モアブルの定理を用いると

$$\begin{aligned}3\alpha^3 - \frac{3}{\alpha^3} &= 3(\alpha^3 - \alpha^{-3}) \\ &= 3\left\{\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right)\right\} - 3\left\{\cos\left(-3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-3 \cdot \frac{\pi}{6}\right)\right\} \\ &= 3i - 3(-i) \\ &= 6i\end{aligned}\quad \dots\dots(\text{答})$$

である。