複素数平面上において，点 $\mathrm{P}(z)$ $(z \neq 0)$ に対して，点 $\mathrm{Q}(w)$ を次式で定める．

$$w = \frac{1}{2}\left(3z + \frac{1}{z^3}\right)$$

(1) 点 $\mathrm{P}(z)$ が円 $C = \{\cos\theta + i\sin\theta \,|\, 0 \leqq \theta < 2\pi\}$ 上の点のとき，w を $\cos\theta$，$\sin\theta$ を用いて表せ．

点 $\mathrm{P}(z)$ が円 C の $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分を動くときの点 $\mathrm{Q}(w)$ の軌跡を K とする．

(2) $w = x + yi$ (x，y は実数) とおく．曲線 K の方程式を x，y を用いて表せ．

(3) 点 $\mathrm{Q}(w)$ が曲線 K 全体を動くとき，$|w|$ の最大値および最小値を求めよ．さらに $|w|$ の最大値および最小値を与える z の値を求めよ．

(22 大阪教大 2)

【答】

(1) $w = 2\cos^3\theta + 2i\sin^3\theta$

(2) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$，$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$

(3) 最大値 4 ($z = 1$，i のとき)，最小値 1 $\left(z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \text{ のとき}\right)$

【解答】

$$w = \frac{1}{2}\left(3z + \frac{1}{z^3}\right) \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) $z = \cos\theta + i\sin\theta$ のとき，w は ① より

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}(3z + z^{-3}) \\ &= \frac{1}{2}\{3(\cos\theta + i\sin\theta) + \cos(-3\theta) + i\sin(-3\theta)\} \quad (\because \text{ ド・モアブルの定理}) \\ &= \frac{1}{2}\left\{3(\cos\theta + i\sin\theta) + (4\cos^3\theta - 3\cos\theta) - i(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)\right\} \\ &\qquad\qquad (\because \text{ 3 倍角の定理}) \\ &= 2\cos^3\theta + 2i\sin^3\theta \end{aligned}$$

である．

(2) $w = x + yi$ (x，y は実数) とおくと，(1) より

$$(*) \begin{cases} x = 2\cos^3\theta \\ y = 2\sin^3\theta \end{cases}$$

θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くときの $\mathrm{Q}(w)$ の軌跡 K は，$(*)$ を満たす θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に存在するような点 $(x,\ y)$ の集合であるから

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\dfrac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \\ x \geqq 0 \text{ かつ } y \geqq 0 \end{cases}$$

よって，曲線 K の方程式は

$$\boldsymbol{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}},\ x \geqq 0 \text{ かつ } y \geqq 0} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $|w|^2$ を θ で表すと

$$\begin{aligned}|w|^2 &= x^2+y^2\\ &= 4(\cos^6\theta+\sin^6\theta)\\ &= 4\{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^3-3\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\}\\ &= 4\left\{1-3\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)^2\right\}\\ &= 4-3\sin^2 2\theta\end{aligned}$$

$0 \leqq 2\theta \leqq \pi$ より $0 \leqq \sin^2 2\theta \leqq 1$ であり

$$\begin{aligned}&1 \leqq |w|^2 \leqq 4\\ \therefore\quad &1 \leqq |w| \leqq 2\end{aligned}$$

$|w|=1$ となるのは

$$\sin^2 2\theta = 1 \qquad \therefore\quad \theta=\frac{\pi}{4} \quad \left(\because\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

のときであり

$$z=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

である．

$|w|=2$ となるのは

$$\sin^2 2\theta = 0 \qquad \therefore\quad \theta=0,\ \frac{\pi}{2} \quad \left(\because\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

のときであり

$$\begin{aligned}z &= \cos 0+i\sin 0,\ \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\\ &= 1,\ i\end{aligned}$$

である．

よって，$|w|$ は

$\boldsymbol{z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}$ **のとき，　最小値 1,** ……(答)

$\boldsymbol{z=1,\ i}$ **のとき，　最大値 2** ……(答)

をとる．