下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

z を虚数単位とし複素数平面上で複素数 $z=5+3i$ に対応する点を P とおく．

(1) 実数を係数とし z を解にもつ 2 次方程式のうち，定数項が 1 であるものは

$$\boxed{\text{ア}}\,x^2-\boxed{\text{イ}}\,x+1=0.$$

(2) 複素数平面の原点を中心に，P を反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を Q とする．点 Q に対応する複素数を w とすると，$w=\boxed{\text{ウ}}+\boxed{\text{エ}}\,i$ (ウ，エは実数) であり，点 Q は複素数平面の第 $\boxed{\text{オ}}$ 象限にある．

(3) (2) で求めた複素数 w の偏角を θ とする．複素数 $u=\cos\varphi+i\sin\varphi\left(-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を考えると，wu の偏角は $\boxed{\text{カ}}+2k\pi$ (k は整数) である．また，wu の虚部が 0 以上となるような u に対して，$\tan\varphi$ がとり得る最大値は $\boxed{\text{キ}}$ である．

(22 奈良県医大 医 2)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
$\dfrac{1}{34}$	$\dfrac{5}{17}$	$\dfrac{5-3\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{3+5\sqrt{3}}{2}$	2	$\theta+\varphi$	$30+17\sqrt{3}$

【解答】

(1) 実数を係数とし，虚数 $z=5+3i$ を解にもつ 2 次方程式のもう一つの解は $\overline{z}=5-3i$ であり

$$z+\overline{z}=10,\quad z\overline{z}=5^2+3^2=34$$

であるから，z, $\overline{z}$ を解とする 2 次方程式の一つは

$$z^2-10z+34=0$$

である．したがって，定数項が 1 であるものは

$$\boldsymbol{\frac{1}{34}}x^2-\boldsymbol{\frac{5}{17}}x+1=0 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 原点を中心に，P(z) を反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点が Q(w) なので

$$\begin{aligned} w&=z\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\\ &=(5+3i)\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\\ &=\boldsymbol{\frac{5-3\sqrt{3}}{2}+\frac{3+5\sqrt{3}}{2}}i \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

$$(w\text{ の実部})=\frac{5-3\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{25}-\sqrt{27}}{2}<0$$

$$(w\text{ の虚部})=\frac{3+5\sqrt{3}}{2}>0$$

であるから，点 Q は複素数平面の第 **2** 象限にある． ……(答)

(3) w の偏角を θ とし，$u=\cos\varphi+i\sin\varphi$ とするとき，wu の偏角 $\arg(wu)$ は

$$\begin{aligned}\arg(wu)&=\arg(w)+\arg(u)\\&=\boldsymbol{\theta+\varphi}+2k\pi\ (k\text{ は整数})\end{aligned}$$ ……(答)

である．

また，Q は第 2 象限にあるから θ は $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ としてよく，φ は $-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$0<\theta+\varphi<\frac{3\pi}{2}$$

である．wu の虚部が 0 以上となる条件は

$$\begin{aligned}&0<\theta+\varphi\leqq\pi\\&\therefore\quad -\theta<\varphi\leqq\pi-\theta\end{aligned}$$

である．$-\dfrac{\pi}{2}>-\theta>-\pi$，$0<\pi-\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に注意し，$-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ もあわせると

$$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi-\theta\left(<\frac{\pi}{2}\right)$$

である．

よって，$\tan\varphi$ の最大値は

$$\begin{aligned}\tan(\pi-\theta)&=-\tan\theta=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\\&=-\frac{3+5\sqrt{3}}{5-3\sqrt{3}}=-\frac{(3+5\sqrt{3})(5+3\sqrt{3})}{25-27}\\&=\boldsymbol{30+17\sqrt{3}}\end{aligned}$$ ……(答)

である．