複素数平面上で，複素数 z を用いて，2 つの円 O_1 と O_2 を，次の式で定義する．

$$O_1 : |z+5| = 1+2\sqrt{5}$$
$$O_2 : |z-5| = 1$$

この 2 つの円に外接する円 O_3 の中心を点 $\mathrm{P}(\alpha)$ とし，円 O_1 と円 O_3 の接点を $\mathrm{Q}(\beta)$ とおくとき，次の問に答えよ．

(1) 複素数 α の実部が正であることを示せ．
(2) 2 つの実数 x, y と虚数単位 i を用いて複素数 α を $\alpha = x+yi$ と表すとき，x を y を用いて表せ．
(3) $t = \tan(\arg(\alpha))$ としたとき，t のとりうる値の範囲を求めよ．ただし，$\arg(\alpha)$ は複素数 α の偏角とする．
(4) 複素数 α を t を用いて表せ．
(5) $\arg(\alpha) = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，複素数 β の値を求めよ．

(22 山形大 医 6)

【答】

(1) 略

(2) $x = \sqrt{5+\dfrac{y^2}{4}}$

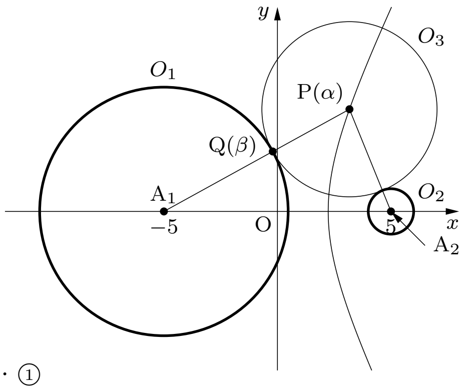
(3) $-2 < t < 2$

(4) $\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{4-t^2}}(1+ti)$

(5) $\beta = -3+\sqrt{5}+2\sqrt{3}i$

【解答】

$$O_1 : |z+5| = 1+2\sqrt{5}$$
$$O_2 : |z-5| = 1$$



(1) 中心が $\mathrm{P}(\alpha)$ の円 O_3 の半径を r とすると，円 O_3 は円 O_1 と円 O_2 に外接するから，2 円に対して

(中心間の距離) = (半径の和)

すなわち

$$\begin{cases} |\alpha+5| = r+(1+2\sqrt{5}) \\ |\alpha-5| = r+1 \end{cases}$$

が成り立つ．辺々の差をとると

$$|\alpha+5| - |\alpha-5| = 2\sqrt{5} \qquad \cdots\cdots ①$$
$$\therefore \quad |\alpha+5| > |\alpha-5|$$

円 O_1, O_2 の中心 -5, 5 をそれぞれ A_1，A_2 とおくと，α は線分 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ の垂直二等分線 (虚軸) の右側にあるから，α の実部は正である．　　　　$\cdots\cdots$ (証明終わり)

- $\alpha = x+yi$ (x, y は実数) とおくと

$$|\alpha+5|^2 > |\alpha-5|^2 \iff (x+5)^2+y^2 > (x-5)^2+y^2$$
$$\therefore \quad x > 0$$

　である．

(2) ① より α は双曲線を描く．xy 平面において，この双曲線は焦点の座標が $(\pm 5,\ 0)$，頂点間の距離が $\sqrt{5}$ であるから，方程式は

$$\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} - \frac{y^2}{5^2 - (\sqrt{5})^2} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1 \qquad \cdots\cdots ②$$

である．(1) より $x > 0$ だから

$$\boldsymbol{x = \sqrt{5 + \frac{y^2}{4}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) 双曲線 ② の漸近線は $y = \pm 2x$ だから，$t = \tan(\arg(\alpha))$ のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{-2 < t < 2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) 直線 OP の方程式は

$$y = x\tan(\arg(\alpha)) \qquad \therefore \quad y = tx$$

である．$y = tx$ と双曲線 ② の交点では

$$\frac{x^2}{5} - \frac{t^2x^2}{20} = 1$$

$$\frac{(4-t^2)x^2}{20} = 1$$

$4 - t^2 > 0,\ x > 0$ に注意すると

$$x = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{4-t^2}}, \quad y = \frac{2\sqrt{5}t}{\sqrt{4-t^2}}$$

よって，α は t を用いて

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{4-t^2}}(1 + ti)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

と表される．

(5) $\arg(\alpha) = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，$t = \sqrt{3}$ だから，(4) より

$$\alpha = 2\sqrt{5}(1 + \sqrt{3}i)$$

このとき

$$\begin{aligned} \mathrm{A_1P} &= |\alpha - (-5)| = |2\sqrt{5}(1+\sqrt{3}i) + 5| \\ &= \sqrt{5}|2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{3}i| \\ &= \sqrt{5}\sqrt{(2+\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{5}\sqrt{21 + 4\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{5}(\sqrt{20} + 1) \\ &= \sqrt{5}(1 + 2\sqrt{5}) \end{aligned}$$

である．点 $\mathrm{Q}(\beta)$ は $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + \dfrac{\mathrm{A_1Q}}{\mathrm{A_1P}}\overrightarrow{\mathrm{A_1P}}$ であるから

$$\begin{aligned} \beta &= -5 + \frac{1 + 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}(1 + 2\sqrt{5})}(\alpha + 5) \\ &= -5 + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5}(2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{3}i) \\ &= \boldsymbol{-3 + \sqrt{5} + 2\sqrt{3}i} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．