$z = 1 + \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)i$ とおく．ここで，i は虚数単位である．

(1) $z = (1 + \sqrt{3}i)(a + bi)$ を満たす実数 $a,\ b$ を求めよ．

(2) z を $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ の形で表せ．ただし，$r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(3) z^n が正の実数となる 100 以下の自然数 n の個数を求めよ．

(22 岡山県大 情報工 1)

【答】

(1) $a = 1,\ b = -1$

(2) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

(3) 4

【解答】

$$z = 1 + \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)i \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) $z = (1 + \sqrt{3}i)(a + bi)$ を展開すると

$$z = a - \sqrt{3}b + (\sqrt{3}a + b)i \qquad \cdots\cdots ②$$

である．$a,\ b$ は実数でることに注意すると，①，② より

$$\begin{cases} a - \sqrt{3}b = 1 + \sqrt{3} \\ \sqrt{3}a + b = \sqrt{3} - 1 \end{cases} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a = 1,\ b = -1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 次のように計算してもよい．

$$\begin{aligned} a + bi &= \frac{z}{1 + \sqrt{3}i} = \frac{\{1 + \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)i\}(1 - \sqrt{3}i)}{1 + 3} \\ &= \frac{\{(1 + \sqrt{3}) + (3 - \sqrt{3})\} + \{(\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} + 3)\}i}{4} \\ &= 1 - i \end{aligned}$$

$$\therefore \quad a = 1,\ b = -1$$

である．

(2) (1) より

$$\begin{aligned} z &= (1 + \sqrt{3}i)(1 - i) \\ &= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \times \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \times \left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\} \\ &= 2\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \\ &= \boldsymbol{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．

(3) (2) の結果とド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned} z^n &= (2\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)^n \\ &= (2\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{12} + i\sin\frac{n\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

であるから，z^n が正の実数となる条件は

$$\begin{cases} \cos\dfrac{n\pi}{12} = 1 \\ \sin\dfrac{n\pi}{12} = 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \frac{n\pi}{12} = 2k\pi \ (k \text{ は整数}) \qquad \therefore \quad n = 24k$$

n が 100 以下の自然数となるのは

$$1 \leqq 24k \leqq 100 \qquad \therefore \quad \frac{1}{24} \leqq k \leqq \frac{25}{6}$$

これをみたす整数 k は $k = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ の 4 個である．

よって，求める n の個数は

4 ……(答)

である．