$a,\ b,\ c$ を実数とし，$a>1,\ c \geqq 0$ とする．2 次方程式 $ax^2-2x+a=0$ の 1 つの解を $z=b+ci$ とし，他の解を w とする．ただし，i は虚数単位を表す．次の問いに答えよ．

(1) $b,\ c$ をそれぞれ a の式で表せ．
(2) 複素数平面上の 3 点 O(0), A(z), B(w) を頂点とする △OAB は，二等辺三角形であることを示せ．
(3) a の値が変化するとき，点 z が描く図形を複素数平面上に図示せよ．
(4) $z^6=-i$ のとき，a の値を求めよ．

(22 岩手大 理工 5)

【答】

(1) $b=\dfrac{1}{a},\ c=\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}$
(2) 略
(3) 略
(4) $a=\sqrt{2}$

【解答】

$$ax^2-2x+a=0\ (a>1,\ c \geqq 0) \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) 解の公式より

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-a^2}}{a}=\frac{1\pm\sqrt{a^2-1}i}{a} \quad (\because\ a>1)$$

である．解の 1 つが $z=b+ci\ (c \geqq 0)$ となるときの $b,\ c$ は

$$\boldsymbol{b=\frac{1}{a},\quad c=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- $z=b+ci$ ($b,\ c$ は実数) が実数係数の 2 次方程式の解であるとき，$\overline{z}$ も解であるから，他の解 w は

  $$w=\overline{z}=b-ci$$

  である．解と係数の関係より

  $$\begin{cases} z+\overline{z}=\dfrac{2}{a} \\ z\overline{z}=1 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} 2b=\dfrac{2}{a} \\ b^2+c^2=1 \end{cases}$$

  $$\therefore \quad b=\frac{1}{a}$$

  $c \geqq 0$ より

  $$c=\sqrt{1-\left(\frac{1}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$$

  である．

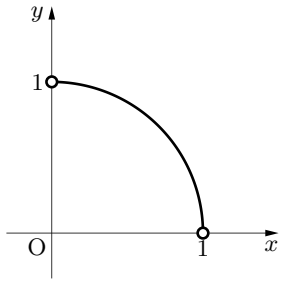
(2) $w=\overline{z}$ であり

$$|w|=|\overline{z}|=|z|$$

が成り立つから，△OAB は OA = OB の二等辺三角形である． $\cdots\cdots$ (証明終わり)

(3) (1) から

$$\begin{cases} b = \dfrac{1}{a} \\ c = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{a}\right)^2} \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{1}{b} \\ c = \sqrt{1 - b^2} \end{cases}$$



よって，$a > 1$ のとき

$$\begin{cases} 0 < b < 1 \\ c = \sqrt{1 - b^2} \end{cases}$$

$$\iff b^2 + c^2 = 1,\ b > 0,\ c > 0$$

であり，点 z の描く図形は右図の太線となる．

(4) (3) から

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

とおくことができる．

$$z^6 = -i \iff \cos 6\theta + i\sin 6\theta = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore \quad 6\theta = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi \ (n \text{ は整数})$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{3}$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より

$$\theta = \frac{\pi}{4} \qquad \therefore \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

よって，$\boldsymbol{a = \sqrt{2}}$ である． ……(答)