i は虚数単位である．複素数平面上で，方程式 $|z+3i|=2|z|$ を満たす図形と方程式 $|z-4i|=|z|$ を満たす図形の共有点を表す複素数をすべて求めよ．

(22 札幌医大 1(1))

【答】 $z=\pm\sqrt{3}+2i$

【解答】

$$|z+3i|=2|z| \qquad \cdots\cdots ①$$

$$|z-4i|=|z| \qquad \cdots\cdots ②$$

①，② を変形する．

$$① \iff |z+3i|^2=4|z|^2$$
$$(z+3i)(\overline{z}-3i)=4z\overline{z}$$
$$z\overline{z}-3iz+3i\overline{z}+9=4z\overline{z}$$
$$\therefore \quad z\overline{z}+iz-i\overline{z}-3=0 \qquad \cdots\cdots ①'$$

また

$$② \iff |z-4i|^2=|z|^2$$
$$(z-4i)(\overline{z}+4i)=z\overline{z}$$
$$z\overline{z}+4iz-4i\overline{z}+16=z\overline{z}$$
$$iz-i\overline{z}+4=0$$
$$\therefore \quad \overline{z}=z-4i \qquad \cdots\cdots ②'$$

図形 ① と ② の共有点は，①′，②′ を連立して

$$z(z-4i)+iz-i(z-4i)-3=0$$
$$z^2-4iz-7=0$$
$$(z-2i)^2=3$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{z=\pm\sqrt{3}+2i} \qquad \cdots\cdots(答)$$

であり，これが求める複素数のすべてである．

- ①は

$$|x+3i|:|z|=2:1$$

より，2 点 $-3i$，0 を 2 : 1 に内分，外分する点を直径の両端とする円 (アポロニウスの円) であり，① は ①′ でもあるから

$$z(\overline{z}+i)-i(\overline{z}+i)=3+1$$
$$|z-i|^2=4$$
$$\therefore \quad |z-i|=2$$

より，① は点 i を中心とする半径 2 の円である．

② は 2 点 $4i$，0 の垂直二等分線であり共有点は

$$\pm\sqrt{3}+2i$$

である．