複素数平面上の点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，$w = z + \dfrac{2}{z}$ で表される点 w の描く図形を C とする．C で囲まれた部分の内部 (ただし，境界線を含まない) に定点 α をとり，α を通る直線 l が C と交わる 2 点を β_1，β_2 とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位を表す．

(1) $w = u + vi$ (u，v は実数) とするとき，u と v の間に成り立つ関係式を求めよ．

(2) 点 α を固定したまま l を動かすとき，積 $|\beta_1 - \alpha| \cdot |\beta_2 - \alpha|$ が最大となるような l はどのような直線のときか調べよ．

(22 東京慈恵医大 医 4)

【答】

(1) $\dfrac{u^2}{9} + v^2 = 1$

(2) l が実軸に平行な直線のとき

【解答】

(1) 原点を中心とする半径 1 の円周上の点 z は

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \ (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

と表すことができる．このとき

$$\begin{aligned} w &= z + \frac{2}{z} \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta) + 2\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\} \\ &= 3\cos\theta - i\sin\theta \end{aligned}$$

となる．$w = u + vi$ (u，v は実数) のとき

$$\begin{cases} u = 3\cos\theta \\ v = -\sin\theta \\ 0 \leqq \theta < 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{u}{3} \\ \sin\theta = -v \\ 0 \leqq \theta < 2\pi \end{cases}$$

であり，u，v の間に成り立つ関係式は

$$\boldsymbol{\frac{u^2}{9} + v^2 = 1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) C で囲まれた部分の内部 (ただし，境界線を含まない) の点 α を $\alpha = a + bi$ (a，b は実数) とおくと，a，b は

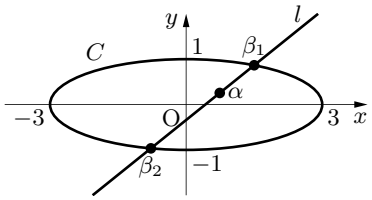
$$\frac{a^2}{9} + b^2 < 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす．α を通る直線 l 上の点 $(u,\ v)$ は，φ を定角，r を変数として

$$\begin{cases} u = a + r\cos\varphi \\ v = b + r\sin\varphi \end{cases}$$

と表すことができる．β_1，β_2 は，r の 2 次方程式

$$\frac{(a + r\cos\varphi)^2}{9} + (b + r\sin\varphi)^2 = 1$$



の 2 解 r_1，r_2 により決まる．

$$(a+r\cos\varphi)^2+9(b+r\sin\varphi)^2=9$$
$$(\cos^2\varphi+9\sin^2\varphi)r^2+2(a\cos\varphi+9b\sin\varphi)r+a^2+9b^2-9=0$$

となり，$|\beta_1-\alpha|=|r_1|$，$|\beta_2-\alpha|=|r_2|$ より，解と係数の関係を用いると

$$\begin{aligned}|\beta_1-\alpha|\cdot|\beta_2-\alpha|&=|r_1r_2|\\&=\left|\frac{a^2+9b^2-9}{\cos^2\varphi+9\sin^2\varphi}\right|\\&=\frac{-(a^2+9b^2-9)}{1+8\sin^2\varphi}\quad(\because\ ①)\end{aligned}$$

と表される．

したがって，点 α を固定したまま l を動かすとき，すなわち，a，b を固定したまま φ を $0\leqq\varphi<2\pi$ の範囲で動かすとき，$|\beta_1-\alpha|\cdot|\beta_2-\alpha|$ が最大となるのは，$\sin^2\varphi$ が最小となるとき

$$\sin^2\varphi=0$$
$$\therefore\quad \varphi=0 \text{ または } \pi$$

のときである．すなわち

l が実軸に平行な直線のとき ……(答)

である．

- 図形 C は楕円であり，原点を中心に u 軸方向に $\dfrac{1}{3}$ 倍すると，原点中心の円 C' になる．円 C' 内の定点 α' を通る直線と円 C' との 2 交点 ${\beta_1}'$，${\beta_2}'$ に対する方べき $|{\beta_1}'-\alpha'|\cdot|{\beta_2}'-\alpha'|$ は一定である (方べきの定理) から，円 C' を原点中心に u 軸方向に 3 倍して得られる図形 C において，積 $|\beta_1-\alpha|\cdot|\beta_2-\alpha|$ が最大となるのは，l が実軸に平行な直線のときである．