z を複素数とする．複素数平面上の相異なる 3 点 O(0)，A($z+1$)，B(z^2-1) が正三角形の頂点となるとき，z を求めよ．

(22 東京都市大 情報・建築都市デザイン・理工 2(1))

【答】 $z=\dfrac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$

【解答】

3 点 O，A，B は相異なるから

$$\begin{cases} z+1\neq 0 \\ z^2-1\neq 0 \\ z+1\neq z^2-1 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} z+1\neq 0 \\ (z+1)(z-1)\neq 0 \\ (z+1)(z-2)\neq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad z\neq \pm 1,\ 2 \qquad \cdots\cdots ①$$

このとき，三角形 OAB が正三角形をなすから，点 A($z+1$) を原点 O(0) を中心に $\pm\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点が B(z^2-1) である．

$$z^2-1=(z+1)\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\} \quad (\text{複号同順})$$

① より

$$z-1=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{z=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．