下の問いに答えなさい．

(1) $z+\dfrac{16}{z}$ が実数となるような 0 でない複素数 z が描く図形を複素数平面上に図示しなさい．

(2) (1) でさらに $2 \leqq z+\dfrac{16}{z} \leqq 10$ となるような 0 でない複素数 z が描く図形を複素数平面上に図示しなさい．

(22 東京都立大 後 理・都市環境・システム 2)

【答】

(1) 略

(2) 略

【解答】

(1) $z+\dfrac{16}{z}$ $(z \neq 0)$ が実数となるための条件は

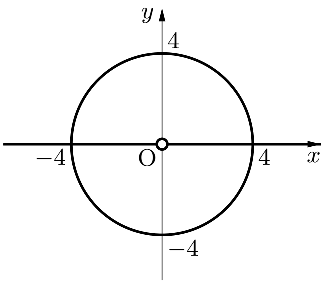
$$z+\frac{16}{z}=\overline{\left(z+\frac{16}{z}\right)} \qquad \cdots\cdots (*)$$

である．これを変形すると

$$\begin{aligned}
(*) \iff & z+\frac{16}{z}=\overline{z}+\frac{16}{\overline{z}} \\
\iff & z^2\overline{z}+16\overline{z}=z\overline{z}^2+16z \quad (\because\ z \neq 0) \\
& z\overline{z}(z-\overline{z})+16(\overline{z}-z)=0 \\
& (z-\overline{z})(z\overline{z}-16)=0 \\
\therefore\ \ & z=\overline{z} \text{ または } |z|=4
\end{aligned}$$

である．

よって，複素数 z $(\neq 0)$ が描く図形は，「実軸 (原点を除く) と原点を中心とする半径 4 の円との和集合」であり，右図となる．



(2) $$2 \leqq z+\frac{16}{z} \leqq 10 \qquad \cdots\cdots (**)$$

(1) より，z は 2 つに場合分けされる．

(i) z が原点を除く実軸上を動くとき

$z=x$ (x は 0 でない実数) と表すことができるから

$$(**) \iff 2 \leqq x+\frac{16}{x} \leqq 10 \iff 2 \leqq \frac{x^2+16}{x} \leqq 10$$

$$\iff \begin{cases} x>0 \\ 2x \leqq x^2+16 \leqq 10x \end{cases} \iff \begin{cases} x>0 \\ x^2-2x+16 \geqq 0 \\ x^2-10x+16 \leqq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x>0 \\ (x-1)^2+15 \geqq 0 \text{ (つねに成立している)} \\ (x-2)(x-8) \leqq 0 \end{cases}$$

$$\therefore\ \ 2 \leqq x \leqq 8 \qquad \cdots\cdots ①$$

である．

(ii) z が円 $|z|=4$ 上を動くとき

$z\overline{z}=4^2$ により $\overline{z}=\dfrac{16}{z}$ であるので

$$(*) \iff 2 \leqq z+\overline{z} \leqq 10$$

$$\iff 1 \leqq \frac{z+\overline{z}}{2} \leqq 5$$

$$\therefore \quad 1 \leqq (z \text{ の実部}) \leqq 5$$

である．$|z|=4$ とあわせると

$$1 \leqq (z \text{ の実部}) \leqq 4 \qquad \cdots\cdots ②$$

となる．

複素数 z が描く図形は「① または ②」であり，右図の太線部分となる．