複素数 $z=\dfrac{\sqrt{3}-3i}{6}$ に対し，n を z^n が正の実数となるような最小な正の整数とする．このとき，z^n の値を求めよ．

(22 東京電機大 工・未来・理工・システム 1(4))

【答】 $\dfrac{1}{27}$

【解答】

z を極形式で表すと

$$\begin{aligned} z &= \frac{\sqrt{3}-3i}{6} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \quad \left(\because \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(\frac{3}{6}\right)^2=\frac{3+9}{6^2}=\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

である．ド・モアブルの定理を用いると

$$z^n=\frac{1}{\sqrt{3}^n}\left(\cos\frac{5n\pi}{3}+i\sin\frac{5n\pi}{3}\right)$$

であるから，z^n が正の実数になる条件は

$$\begin{cases} \cos\dfrac{5n\pi}{3}>0 \\ \sin\dfrac{5n\pi}{3}=0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \frac{5n\pi}{3}=2k\pi \ (k \text{ は整数}) \qquad \therefore \quad n=\frac{6k}{5} \qquad \cdots\cdots ①$$

であり，① を満たす最小な正の整数 n は

$$n=6 \quad (k=5)$$

である．

よって，求める z^n の値は

$$z^6=\frac{1}{\sqrt{3}^6}(\cos 10\pi+i\sin 10\pi)=\frac{1}{3^3}=\mathbf{\frac{1}{27}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．