複素数平面上に原点 O を中心とする単位円をとる．その円周上に，異なる 4 点 P_0, P_1, P_2, P_3 を順に反時計回りにとる．ただし，この 4 点は次を満たすとする．点 P_0 は実軸の正の半直線上にあり，$\angle \mathrm{P}_0\mathrm{OP}_1 = \theta$ とすると $\angle \mathrm{P}_1\mathrm{OP}_2 = 2\theta$，$\angle \mathrm{P}_2\mathrm{OP}_3 = 3\theta$，$\angle \mathrm{P}_3\mathrm{OP}_0 = 4\theta$ となる．ここで，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ である．

(1) $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$ である．

(2) $z = \cos\theta + i\sin\theta$ (i は虚数単位)，$w = z + \dfrac{1}{z}$ とおく．このとき，$w^2 + aw + b = 0$ を満たす整数 a, b の値は $a = \boxed{\text{イウ}}$，$b = \boxed{\text{エオ}}$ である．

(3) $\cos\theta = \dfrac{\boxed{\text{カ}} + \sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$，$\cos 3\theta = \dfrac{\boxed{\text{ケ}} - \sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である．

(4) 2 点 P_1, P_2 間の距離を L とするとき，$L^2 = \dfrac{\boxed{\text{シ}} - \sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である．

(5) $\triangle \mathrm{P}_2\mathrm{OP}_3$ の面積を S とするとき，$S^2 = \dfrac{\boxed{\text{ソ}} + \sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ である．

(22 東北医薬大 医 2)

【答】

ア	イウ	エオ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チツ
5	-1	-1	1	5	4	1	5	4	5	5	2	5	5	32

【解答】

(1) 異なる 4 点 P_0, P_1, P_2, P_3 は原点 O を中心とする単位円周上にこの順で反時計回りに並ぶから

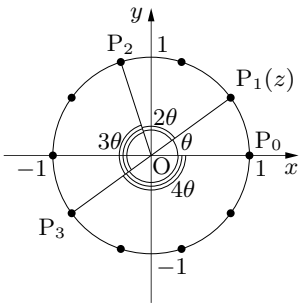
$$\angle \mathrm{P}_0\mathrm{OP}_1 + \angle \mathrm{P}_1\mathrm{OP}_2 + \angle \mathrm{P}_2\mathrm{OP}_3 + \angle \mathrm{P}_3\mathrm{OP}_0 = 2\pi$$

が成り立つ．したがって

$$\theta + 2\theta + 3\theta + 4\theta = 2\pi$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{\mathbf{5}} \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{を満たす}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．4 点 P_0, P_1, P_2, P_3 は右図のように円周上に並ぶ．



(2) $z = \cos\theta + i\sin\theta$ より

$$z = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5} \quad (\because\ (1))$$

$$\therefore \quad z^5 = \cos\pi + i\sin\pi \quad (\because\ \text{ド・モアブルの定理})$$
$$= -1$$

である．

$$z^5 + 1 = 0$$

$$\therefore \quad (z+1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = 0$$

$z \neq -1$ であるから，z は

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす．z は $z \neq 0$ でもあるから，辺々を z^2 で割ると

$$z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$$

$$\therefore \quad \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$$

$w = z + \dfrac{1}{z}$ であるから

$$w^2 - w - 1 = 0 \qquad \therefore \quad w = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ここで，$w = z + z^{-1} = \left(\cos\dfrac{\pi}{5} + i\sin\dfrac{\pi}{5}\right) + \left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)\right\} = 2\cos\dfrac{\pi}{5} > 0$ であるから

$$w = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

である．$w = z + \dfrac{1}{z}$ は $w^2 + aw + b = 0$ を満たすから

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 + a\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + b = 0$$

$$\frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} + a\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + b = 0$$

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{a}{2} + b\right) + \frac{1 + a}{2}\sqrt{5} = 0$$

a, b は整数であり，$\sqrt{5}$ は無理数であるから

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2} + \dfrac{a}{2} + b = 0 \\ \dfrac{1 + a}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a = -1, \quad b = -1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 有理数係数の 2 次方程式 $px^2 + qx + r = 0$ $(p \neq 0)$ が無理数解 $s + t\alpha$ (s, t は有理数，α は無理数) を解にもつならば，$s - t\alpha$ も解であることが解答と同じようにして示される．

  本問では a, b が整数 (有理数) であるから，$w = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ に対して，$w' = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ とおくと，w, w' は 2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解である．解と係数の関係より

  $$a = -(w + w') = -\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = -1$$

  $$b = ww' = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -1$$

  である．

(3) $w = z + z^{-1} = 2\cos\theta$，$w = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ より

$$\cos\theta = \frac{w}{2} = \boldsymbol{\frac{1 + \sqrt{5}}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$= 4\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^3 - 3\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)$$

$$= \frac{1 + 3\sqrt{5} + 15 + 5\sqrt{5}}{16} - 3\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{1 - \sqrt{5}}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $5\theta=\pi$ より，$3\theta=\pi-2\theta$ であるから

$$\cos 3\theta=\cos(\pi-2\theta)=-\cos 2\theta=-(2\cos^2\theta-1)$$
$$=-2\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2+1=-2\cdot\frac{6+2\sqrt{5}}{16}+1=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

- $z'=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$ とおくと

$$z'^5=\cos 15\theta+i\sin 15\theta=\cos 3\pi+i\sin 3\pi=-1$$

である．$z'\neq -1$ より (2) と同じ議論により $w'=z'+\dfrac{1}{z'}$ は $w'^2-w'-1=0$ を満たすことがわかる．すなわち，$w,\ w'$ は $x^2-x-1=0$ を満たす．このとき，$w'=2\cos 3\theta$ であり，$\cos\theta=\cos\dfrac{\pi}{5}>0$，$\cos 3\theta=\cos\dfrac{3\pi}{5}<0$ であるから，$w,\ w'$ は $x^2-x-1=0$ の異なる 2 解である．よって

$$\cos\theta=\frac{w}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{4},\quad \cos 3\theta=\frac{w'}{2}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

である．

(4) $\triangle \mathrm{P_1OP_2}$ で余弦定理を用いると

$$L^2=1^2+1^2-2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos 2\theta$$
$$=2\left(1-\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(5) S は $\triangle \mathrm{P_2OP_3}$ の面積であるから

$$S^2=\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin 3\theta\right)^2=\frac{1}{4}\sin^2 3\theta=\frac{1}{4}(1-\cos^2 3\theta)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{5+\sqrt{5}}{32}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $S^2=\dfrac{1}{4}\sin^2 3\theta=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1-\cos 6\theta}{2}$ である．ここで，

$$\cos 6\theta=\cos(5\theta+\theta)=\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

であるから

$$S^2=\frac{1}{8}\left(1-\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)=\frac{5+\sqrt{5}}{32}$$

である．