z を実数でない複素数，$\mathrm{A}(z)$, $\mathrm{B}(z^2)$, $\mathrm{C}(z^3)$ を複素数平面上の 3 点とする．以下の問に答えよ．

(1) 3 点 A，B，C は一直線上にないことを示せ

(2) w を $w \neq 0,\ 1$ である複素数，$\mathrm{O}(0)$, $\mathrm{P}(1)$, $\mathrm{Q}(w)$ を複素数平面上の 3 点とし，$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{OPQ}$, $\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{POQ}$ とする．w の値を z を用いて表せ．ただし，角は向きを含めて考える．

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ が直角二等辺三角形になるときの z の値を求めよ．

(22 神戸大 後 理系 2)

【答】

(1) 略

(2) $w = z + 1$

(3) $z = -1 \pm i,\ \pm i,\ \dfrac{-1 \pm i}{2}$

【解答】

(1) z は実数でないから

$$z^2 - z = z(z-1) \neq 0$$
$$z^3 - z^2 = z^2(z-1) \neq 0$$
$$z^3 - z = z(z+1)(z-1) \neq 0$$

が確認され，3 点 $\mathrm{A}(z)$, $\mathrm{B}(z^2)$, $\mathrm{C}(z^3)$ は互いに異なる．さらに

$$\frac{z^3 - z}{z^2 - z} = z + 1 \neq (\text{実数})$$

であるから，A，B，C は同一直線上にない． ……(証明終わり)

(2) $w \neq 0,\ 1$ のとき，$\mathrm{O}(0)$, $\mathrm{P}(1)$, $\mathrm{Q}(w)$ は相異なる 3 点であり

$$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{OPQ},\ \angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{POQ} \quad (\text{向きを含めて 2 角が等しい})$$

が成り立つから

$$\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{OPQ}\ (\text{同じ向きで相似})$$

である．したがって，$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}$ かつ $\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{POQ}$ (向きを含めて角が等しい) が成り立ち

$$\frac{z^3 - z}{z^2 - z} = \frac{w - 0}{1 - 0}$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{w = z + 1}$$ ……(答)

である．

(3) (2) により，$w = z + 1$ のとき

$$\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{OPQ}$$

であり，$\triangle\mathrm{OPQ}$ が直角二等辺三角形になる条件を求める．どの角が直角となるかで場合分けする．以下，複号同順として計算する．

(i) $\angle\mathrm{QOP}$ が直角のとき

$$\frac{1 - 0}{w - 0} = \pm i \qquad \therefore\quad w = \pm\frac{1}{i} = \mp i$$

(ii) ∠OPQ が直角のとき

$$\frac{w-1}{0-1}=\pm i \qquad \therefore \quad w=1\mp i$$

(iii) ∠PQO が直角のとき

$$\frac{0-w}{1-w}=\pm i \qquad \therefore \quad w=\pm i(w-1) \qquad \therefore \quad w=\frac{\mp i}{1\mp i}=\frac{1\mp i}{2}$$

よって，△ABC が直角二等辺三角形になるときの $z(=w-1)$ の値は

$$\boldsymbol{-1\pm i,\ \pm i,\ \frac{-1\pm i}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- (2) があるので，△OPQ を経由して △ABC を考えたが，直接 △ABC が直角二等辺三角形になる条件を考えてもよい．以下，複号同順として計算する．

  (i) ∠CAB が直角のとき

  $$\frac{z^2-z}{z^3-z}=\pm i \qquad \therefore \quad \frac{1}{z+1}=\pm i \qquad \therefore \quad z=-1\pm\frac{1}{i}=-1\mp i$$

  (ii) ∠ABC が直角のとき

  $$\frac{z^3-z^2}{z-z^2}=\pm i \qquad \therefore \quad -z=\pm i \qquad \therefore \quad z=\mp i$$

  (iii) ∠BCA が直角のとき

  $$\frac{z-z^3}{z^2-z^3}=\pm i \qquad \therefore \quad \frac{1+z}{z}=\pm i \qquad \therefore \quad z=\frac{-1}{1\mp i}=\frac{-1\pm i}{2}$$

  である．