$z,\ w$ を複素数とする．$|z|=1$ または $|w|=1$ のとき

$$|z\overline{w}+1|=|z+w|$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\overline{w}$ は w の共役な複素数を表す．

(22 福岡教大 1(1))

【答】 略

【解答】

$$|z\overline{w}+1|=|z+w| \qquad \cdots\cdots (*)$$

辺々の 2 乗を計算すると

$$\begin{aligned}|z\overline{w}+1|^2 &= (z\overline{w}+1)\overline{(z\overline{w}+1)}\\ &= (z\overline{w}+1)(\overline{z}w+1)\\ &= z\overline{z}w\overline{w}+z\overline{w}+\overline{z}w+1\\ &= |z|^2|w|^2+z\overline{w}+\overline{z}w+1 \qquad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)}\\ &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w})\\ &= z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w}\\ &= |z|^2+z\overline{w}+w\overline{z}+|w|^2 \qquad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

であり，①, ② の辺々を引くと

$$\begin{aligned}|z\overline{w}+1|^2-|z+w|^2 &= |z|^2|w|^2+1-|z|^2-|w|^2\\ &= (|z|^2-1)(|w|^2-1)\end{aligned}$$

が成り立つ．

よって，$|z|=1$ または $|w|=1$ のとき，$|z\overline{w}+1|^2=|z+w|^2$ が成り立つから

$$|z\overline{w}+1|=|z+w|$$

も成り立つ． ……(証明終わり)

- $|z|=1$ のとき，$|\overline{z}|=1$ であるから

  $$|z\overline{w}+1|=|\overline{z}||z\overline{w}+1|=|\overline{z}(z\overline{w}+1)|=|\overline{w}+\overline{z}|=|w+z|=|z+w|$$

  $|w|=1$ のとき

  $$|z\overline{w}+1|=|w||z\overline{w}+1|=|w(z\overline{w}+1)|=|z+w|$$

  が成り立つ．すなわち，$|z|=1$ または $|w|=1$ ならば

  $$|z\overline{w}+1|=|z+w|$$

  が成り立つ．